

Varianta 2
Barem
Olimpiada națională de matematică
Etapă locală, județul Teleorman, 25 februarie 2023
Clasa a VII – a

1. Să se determine numărul \overline{aabbba} , a și b fiind cifre în sistemul zecimal, dacă $\sqrt{\overline{aabbba}} = \overline{aab} - b - a$

$$\overline{aab} - b - a = a \cdot 100 + a \cdot 10 + b - b - a = a \cdot 109 \quad 1 \text{ punct}$$

$$\sqrt{\overline{aabbba}} = \overline{aab} - b - a, \text{ obținem } \sqrt{\overline{aabbba}} = a \cdot 109 \quad 1 \text{ punct}$$

$$\text{Atunci } \overline{aabbba} = (109 \cdot a)^2 = 11881 \cdot a^2 \quad 1 \text{ punct}$$

a este o cifra nenula:

$$\text{Dacă } a=1, \text{ atunci } \overline{aabbba} = 11881 \cdot a^2 \Rightarrow \overline{11bb1} = 11881 \Rightarrow b = 8 \quad 1 \text{ punct}$$

$$\text{Dacă } a=2, \text{ atunci } 11881 \cdot 4 = 47524 \text{ nu este forma de } \overline{aabbba} \quad 1 \text{ punct}$$

$$\text{Dacă } a \geq 3 \text{ atunci } 11881 \cdot a^2 \geq 11881 \cdot 9 = 106929 > \overline{aabbba} \quad 1 \text{ punct}$$

$$\text{Deci } a=1 \text{ și } b = 8 \quad 1 \text{ punct}$$

$$2. \text{ Fie mulțimea } M = \left\{ \frac{\sqrt{4}-\sqrt{2}}{\sqrt{8}}; \frac{\sqrt{6}-\sqrt{4}}{\sqrt{24}}; \frac{\sqrt{8}-\sqrt{6}}{\sqrt{48}}; \dots; \frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2022}}{\sqrt{4092528}} \right\}$$

a) Calculați suma elementelor din mulțimea M

$$S = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2022}} - \frac{1}{\sqrt{2024}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2024}} \quad 3 \text{ puncte}$$

b) Să se arate că pentru orice submulțime B a mulțimii M, suma elementelor lui B nu este număr natural

Deoarece M are toate elementele pozitive suma elementelor lui B va fi pozitivă 2 puncte

$$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ deci } x \notin \mathbb{N} \quad 2 \text{ puncte}$$

3. Fie ABCD un pătrat și punctele P ∈ (BC) și Q ∈ (CD) astfel încât [BP] ≡ [CQ]. Știind că AC ∩ BQ = {G} și AP ∩ BD = {H}. Arătați că:

a) AP ⊥ BQ

$$\text{Fie } \{M\} = AP \cap BQ \text{ și } \{O\} = AC \cap BD \quad 1 \text{ punct}$$

$$ABP \equiv BCQ \Rightarrow \sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle CBQ \Rightarrow \sphericalangle PBM + \sphericalangle MPB = \sphericalangle BAM + \sphericalangle MPB = 90^\circ \Rightarrow$$

$$m(\sphericalangle BMP) = 90^\circ \Rightarrow AP \perp BQ \quad 2 \text{ puncte}$$

b) $GH \perp CD$

În triunghiul ABG , $[AM]=h$, $[BO]=h \Rightarrow H$ ortocentru $\Rightarrow GH \perp AB$ 2 puncte

$AB \parallel CD \Rightarrow GH \perp CD$ 2 puncte

4. Fie $ABCD$ un paralelogram, P mijlocul segmentului $[AD]$ și Q mijlocul segmentului $[DC]$. Dacă $\{M\}=AQ \cap BD$ și $\{N\}=BP \cap AC$. Arătați că:

$$\frac{OM}{MD} = \frac{ON}{NA}$$

Dacă $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow M$ - centrul de greutate al triunghiului ADC și N - centrul de greutate al triunghiului ADB . 3 puncte

În aceste triunghiuri $\Rightarrow [DO]$ și $[AO]$ - mediane $\Rightarrow \frac{OM}{MD} = \frac{1}{2}$ 3 puncte

$$\frac{ON}{NA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OM}{MD} = \frac{ON}{NA} \quad 1 \text{ punct}$$