

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
Clasa a VII a
Olimpiada de matematică – Etapa locală 18.02.2023

- Nu se acorda puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

1.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2022 \cdot 2023} =$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} = \quad 1p$$

$$1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024} - \frac{1}{2024} = \frac{2022}{2024} \quad 2p$$

$$1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad 2p$$

$$1+2+3+4+\dots+2022 = \frac{2022(2022+1)}{2} = \frac{2022 \cdot 2023}{2}$$

$$X = \sqrt{\frac{2022}{2023}} \cdot \frac{2}{2022 \cdot 2023} = \sqrt{\frac{2}{2023^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2023} \notin Q \quad 2p$$

$$2. a = \sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} + 3^2 + \dots + 3^{1007}\sqrt{3} + 3^{1008} =$$

$$3(1 + 3 + \dots + 3^{1007}) + \sqrt{3}(1 + 3 + \dots + 3^{1007}) =$$

$$(1 + 3 + \dots + 3^{1007})(3 + \sqrt{3}). \quad 2p$$

$$b = 3(1 + 3 + \dots + 3^{2015}). \quad 1p$$

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} = \frac{1+3+\dots+3^{2015}}{1+3+\dots+3^{1007}} \quad 2p$$

$$c = \frac{3^{1008} + 3^{1009} + \dots + 3^{2015}}{1+3+\dots+3^{1007}} = 3^{1008} = (3^{504})^2 \quad p.p. \quad 2p$$

3. ΔBCD

N mijloc BC

M mijloc CD \Rightarrow MN linie mijlocie în $\Delta BCD \Rightarrow MN \parallel BD$ și $MN = \frac{BD}{2}$ 1p

ΔCOD

M mijloc CD

PM \parallel OD \Rightarrow P mijloc OC \Rightarrow PM linie mijlocie în $\Delta COD \Rightarrow PM = \frac{OD}{2}$ 1p

ΔCOB

P mijloc OC

PN \parallel OB \Rightarrow N mijloc BC \Rightarrow NP linie mijlocie în $\Delta COB \Rightarrow NP = \frac{OB}{2}$ 1p

Deoarece O este centru de greutate în ΔAMN și $O \in AP \Rightarrow$ P mijloc MN $\Rightarrow MP \equiv NP$

$\Rightarrow \frac{OD}{2} = \frac{OB}{2} \Rightarrow OB \equiv OD$ 1p

AP mediană

$O \in AP \Rightarrow OA = 2 \cdot OP = OC$ 1p

O mijloc DB

O mijloc AC \Rightarrow ABCD paralelogram 2p

4.

Fie $AC \cap DB = \{O\}$

ΔADB

E mijloc AB \Rightarrow DE mediană

O mijloc DB \Rightarrow AO mediană

$AC \cap DE = \{P\} \Rightarrow$ P centru de greutate 1p

$\Rightarrow \frac{DP}{DE} = \frac{2}{3}$

ΔDBC

O mijloc DB \Rightarrow CO mediană

F mijloc CD \Rightarrow BF mediană

$AC \cap FB = \{N\} \Rightarrow N$ centru de greutate 1p

$$\Rightarrow \frac{FN}{FB} = \frac{1}{3}$$

F mijloc CD

O mijloc AC \Rightarrow FO linie mijlocie în triunghiul CAD $\Rightarrow FO = \frac{AD}{2}$

$AD \equiv AE$

$\angle A = 60^\circ \Rightarrow \triangle ADE$ echilateral $\Rightarrow DE \equiv AD \equiv AE$ 1p

Analog $\triangle FBC$ echilateral

$DF \equiv BE$

$DF \parallel BE \Rightarrow BEDF$ paralelogram

Dar $DE \equiv DF \Rightarrow BEDF$ romb $\Rightarrow O$ mijloc EF $\Rightarrow M \equiv O$ 1p

Aria $\triangle ADP = \frac{AD^2 \sqrt{3}}{6}$ 1p

Aria $\triangle FMN = \frac{AD^2 \sqrt{3}}{24}$ 1p

$\frac{A_{\triangle ADP}}{A_{\triangle FMN}} = 4$ 1p