

**Olimpiada de Matematică – Etapa Locală**  
**Maramureș – 18 februarie 2023**  
**Clasa a XII - a**

**Barem de corectare și notare**

**1.** Din  $ab = ba^3$ , prin înmulțire la dreapta cu  $a$ , se obține  $aba = b$  (1).....2p

Fie  $P(n): b = a^n b a^n, n \in \mathbb{N}$

$P(0): b = e b e$ , adevărată,  $P(1): b = a b a$ , adevărată, conform (1).....1p

Pp.  $P(k)$  adevărată, adică  $b = a^k b a^k, k \in \mathbb{N}$ .

Atunci  $a^{k+1} b a^{k+1} = a a^k b a^k a = a b a = b$ , deci  $P(k+1)$  este adevărată.....4p

**2.a)** Fie  $f: G \rightarrow G, f(x) = x^2, \forall x \in G$ . Conform ipotezei, funcția  $f$  este surjectivă.

Deoarece  $G$  este mulțime finită, rezultă că  $f$  este injectivă

În concluzie,  $\forall a \in G$  ecuația  $x^2 = a$  are o singură soluție în  $G$ .....2p

În particular, pentru  $a = e$ , deducem că ecuația  $x^2 = e$  are unica soluție  $x = e$ .

Atunci  $x^2 \neq e, \forall x \in G \setminus \{e\}$ . Atunci  $G \setminus \{e\}$  are un număr par de elemente, deoarece ele se pot grupa în  $k$  perechi de forma  $(\alpha, \alpha^{-1}), \alpha \neq \alpha^{-1}$ . Deci grupul are  $2k + 1$  elemente.....2p

**b)** Vom demonstra că dacă  $n$  este impar, atunci orice grup cu  $n$  elemente are proprietatea că pentru orice  $a \in G$  ecuația  $x^2 = a$  are o singură soluție în  $G$ . Pentru aceasta, este suficient să demonstrăm că  $f: G \rightarrow G, f(x) = x^2, \forall x \in G$  este injectivă.

Fie  $x, y \in G$  astfel încât  $f(x) = f(y)$ .

Dacă  $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha^{2k+1} = e, \forall \alpha \in G$ .

Din  $x^2 = y^2 \Rightarrow x^{2k} = y^{2k}$  și cum  $x^{2k+1} = y^{2k+1} \Rightarrow x = y$

Un exemplu de astfel de grup este  $(\mathbb{Z}_n, +)$  cu  $n$  impar.....3p

**3.**  $F(x) \in \int x \sin x \cdot e^{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot e^{\cos x} dx$ .

Fie  $I_1 = \int x \sin x \cdot e^{\cos x} dx, I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot e^{\cos x} dx$

Utilizând metoda integrării prin părți obținem

$$I_1 = \int x \sin x \cdot e^{\cos x} dx = \int x (-e^{\cos x})' dx = -x \cdot e^{\cos x} + \int e^{\cos x} dx \dots\dots\dots 3p$$

$$I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot e^{\cos x} dx = \int \left( -\frac{1}{\sin x} \right)' \cdot e^{\cos x} dx = -\frac{e^{\cos x}}{\sin x} - \int e^{\cos x} dx \dots\dots\dots 3p$$

$$F(x) = I_1 + I_2 = -x \cdot e^{\cos x} - \frac{e^{\cos x}}{\sin x} + C$$

$$\text{Din } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = -\frac{x \sin x + 1}{\sin x} \cdot e^{\cos x} \dots\dots\dots 1p$$

**4.**  $F(x) = \frac{(x^4 + 1)f(x)}{x^2 + 1}, \forall x > 0$  și cum  $f > 0 \Rightarrow F > 0$  .....1p

Atunci  $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} \Rightarrow (\ln F(x))' = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}, \forall x > 0$  .....1p

$$\text{Dar } \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} dx = \int \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)'}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C \dots \dots 3p$$

$$\text{Prin urmare } F(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C} \Rightarrow f(x) = F'(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C} \dots \dots 1p$$

Dar  $f(1) = 1 \Rightarrow C = 0$ , de unde se obține

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}} \dots \dots 1p$$