

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 18 februarie 2023
Clasa a V - a

Barem de corectare și notare

1. Aflați ultima cifră a numărului $A = 2023^{2022} \cdot 2022^{2023} + 18$.

prof. dr. Melania-Iulia Dobrican

Barem: $u(2023^{2022}) = u(3^{2022}) = u(3^{4 \cdot 505 + 2}) = u(3^2) = 9$ 2p
 $u(2022^{2023}) = u(2^{2023}) = u(2^{4 \cdot 505 + 3}) = u(2^3) = 8$ 2p
 $u(2023^{2022} \cdot 2022^{2023}) = u(9 \cdot 8) = 2$ 2p
 $u(A) = u(2 + 18) = 0$ 1p

2. Bunicul are șapte nepoți: Andrei, Bogdan, Costin, Dan, Emil, Florin și Gabriel. Vârsta bunicului este de 74 de ani și este egală cu suma vârstelor nepoților săi. Vârstele lui Andrei, Bogdan, Costin, Dan, Emil și Florin sunt numere pare consecutive, iar Gabriel are un frate geamăn. Știind că Andrei este cel mai mic dintre frați, aflați câți ani are Gabriel și cum se numește fratele său geamăn.

Gazeta Matematică 10 / 2022

Barem: Notăm cu $2x$ vârsta lui Andrei și cu y vârsta lui Gabriel.

$2x + (2x + 2) + (2x + 4) + (2x + 6) + (2x + 8) + (2x + 10) + y = 74$ 1p
 $12x + 30 + y = 74$, deci $12x + y = 44$ 1p
 $12x < 44$, așadar $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ 1p
Dacă $x = 0$, atunci $y = 44 > 2x + 10 = 10$, deci Gabriel nu are niciun frate geamăn, fals. 1p
Dacă $x = 1$, atunci $y = 32 > 2x + 10 = 12$, deci Gabriel nu are niciun frate geamăn, fals. 1p
Dacă $x = 2$, atunci $y = 20 > 2x + 10 = 14$, deci Gabriel nu are niciun frate geamăn, fals. 1p
Dacă $x = 3$, atunci $y = 8 = 2x + 2$, deci fratele geamăn al lui Gabriel este Bogdan. 1p

3. Se consideră numerele naturale nenule x și y , astfel încât $4x + y = 2023$.

a) Determinați restul împărțirii lui y la 4.

b) Dacă, în plus, câtul împărțirii lui x la y este egal cu 9, aflați numerele x și y .

Barem: a) Din teorema împărțirii cu rest, $y = 4z + r$, cu $z, r \in \mathbb{N}$, $r \leq 3$ 1p
 $4(x + z) + r = 4 \cdot 505 + 3$, deci $r = 3$ 2p
b) Din teorema împărțirii cu rest, $x = 9y + s$, cu $s \in \mathbb{N}$, $s < y$ 1p
Înlocuind în egalitatea din enunț, obținem $37y + 4s = 2023$ 1p
Deoarece $0 \leq s < y$, rezultă $37y \leq 37y + 4s < 41y$, deci $37y \leq 2023 < 41y$
Obținem $y \in \{50, 51, 52, 53, 54\}$ 1p
Din a) știm că restul împărțirii lui y la 4 este 3, așadar $y = 51$ și $x = 493$ 1p

4. Un număr natural n este *util* dacă are 4 cifre și are proprietatea că, atunci când îi eliminăm cifra sutelor, adunăm 15 la numărul rămas, apoi înmulțim cu 17 suma obținută și împărțim la 2 noul rezultat, obținem tot numărul n .

a) Arătați că numărul n are ultima cifră 3.

b) Determinați toate numerele *utile* mai mici decât 3000.

Barem: a) Fie $n = \overline{abcd}$, cu a, b, c, d cifre, $a \neq 0$.

$$\overline{abcd} = \left[(\overline{acd} + 15) \cdot 17 \right] : 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$2 \cdot \overline{abcd} = 17 \cdot \overline{acd} + 255 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Obținem } 300a + 200b = 15(10c + d) + 255, \text{ deci } 5 \cdot 20 \cdot (3a + 2b) = 5 \cdot [3(10c + d) + 51]$$

rezultă că $3 \cdot \overline{cd} + 51$ se împarte exact la 20,

ceea ce implică $\overline{cd} + 17$ se împarte exact la 20, 1p

Membrul stâng are ultima cifră 0, deci $u(\overline{cd} + 17) = 0$, de unde rezultă $d = 3$ 1p

b) Înlocuind, deducem că $6 \cdot a + 4 \cdot b = 3 \cdot c + 6$.

Membrul stâng este par, deci c este par. 1p

Din ipoteză, avem $a \in \{1, 2\}$.

Dacă $a = 1$, rezultă $4b = 3c$. Numerele *utile* sunt 1003, 1343 și 1683. 1p

Dacă $a = 2$, obținem $\begin{cases} c = 2 \\ b = 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} c = 6 \\ b = 3 \end{cases}$ și numerele *utile* 2023, 2363. 1p