

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 18 februarie 2023
Clasa a VI - a

Barem de corectare și notare

1. Fie mulțimile:

$$A = \{x \mid x = 2k + 5, k \in \mathbb{N}\} \text{ și}$$

$$B = \{y \mid y = n^2 + n, n \in \mathbb{N}\},$$

în care elementele sunt ordonate crescător.

- a) Scrieți primele trei elemente din fiecare mulțime;
- b) Arătați că $105 \in A \setminus B$;
- c) Arătați că mulțimile A și B sunt disjuncte.

Soluție

- a) $\{5, 7, 9\} \subset A$ 0,5p
 $\{0, 2, 6\} \subset B$ 0,5p
- b) $2k + 5 = 105 \Rightarrow 2k = 100 \Rightarrow k = 50 \Rightarrow 105 \in A$ 1p
 $n^2 + n = n(n + 1) = \text{par} \neq 105 \Rightarrow 105 \notin B$ 2p
- c) $2k + 5 = \text{impar}$
 $n^2 + n = n(n + 1) = \text{par} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ 3p

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}$ pentru care

$$\frac{a - 2b + 3c}{4a - 3b + 2c} = \frac{2}{3}.$$

- a) Arătați că $a = c$;
- b) Pentru $a \neq 2b$, determinați valoarea raportului

$$\frac{7a - 4b + c}{7a - 9b + 11c}.$$

Soluție

- a) $\frac{a - 2b + 3c}{4a - 3b + 2c} = \frac{2}{3} \Rightarrow 8a - 6b + 4c = 3a - 6b + 9c \Rightarrow a = c$ 3p
- b) $\frac{7a - 4b + c}{7a - 9b + 11c} = \frac{8a - 4b}{18a - 9b} = \frac{4(2a - b)}{9(2a - b)} = \frac{4}{9}$ 4p

3. Se consideră punctele coliniare A, O, D în această ordine. Punctele B și C sunt situate în același semiplan față de dreapta AD , astfel încât $\sphericalangle AOB$ este egal cu 20% din $\sphericalangle BOD$ și $\sphericalangle COD$ este 50% din $\sphericalangle AOC$.

- a) Determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$.
- b) Determinați $\sphericalangle CON$, știind că $[OM]$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$ și că măsura unghiului $\sphericalangle MON$ este egală cu cel mai mic număr natural impar care are exact 3 divizori.

Soluție

a) $\sphericalangle AOB = x, \sphericalangle BOC = y, \sphericalangle COD = z \Rightarrow$

$$x = \frac{20}{100}(y + z); z = \frac{50}{100}(x + y) \Rightarrow 5x = y + z; 2z = x + y \quad 2p$$

$$x + y + z = 180^\circ \Rightarrow 6x = 180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ \quad 1p$$

$$z = 60^\circ \text{ și } y = 90^\circ \quad 1p$$

a) $\sphericalangle MON = 9^\circ \quad 1p$

Cazul I

$$[ON \in Int \sphericalangle AOM \Rightarrow \sphericalangle CON = \sphericalangle MON + \sphericalangle MOB + \sphericalangle BOC = 114^\circ \quad 1p$$

Cazul II

$$[ON \in Int \sphericalangle BOM \Rightarrow \sphericalangle CON = \sphericalangle MOB - \sphericalangle MON + \sphericalangle BOC = 96^\circ \quad 1p$$

4. Se consideră numerele naturale nenule a, b, c care satisfac relația:

$$2a + 31b = 29c.$$

- a) Descompuneți numărul 1798 în produs de factori primi;

- b) Arătați că $(a + b)(b + c)(c + a)$ este divizibil cu 1798.

Soluție

a) $1798 = 2 \cdot 29 \cdot 31 \quad 2p$

b) $2a + 31b = 29c \Rightarrow 31a + 31b = 29c + 29a \Rightarrow$

$$31(a + b) = 29(a + c) \quad 1p$$

$$\left. \begin{array}{l} 31(a + b) : 29 \\ (31; 29) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow (a + b) : 29 \quad 1p$$

$$\left. \begin{array}{l} 29(a + c) : 31 \\ (31; 29) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow (a + c) : 31 \quad 1p$$

$$2a + 31b = 29c \Rightarrow 2a + 60b = 29c + 29b \Rightarrow$$

$$2(a + 30b) = 29(b + c) \quad 1p$$

$$\left. \begin{array}{l} 29(b + c) : 2 \\ (2; 29) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow (b + c) : 2$$

$$(a + b)(b + c)(c + a) : 2 \cdot 29 \cdot 31 \Rightarrow (a + b)(b + c)(c + a) : 1798 \quad 1p$$