

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 18 februarie 2023
Clasa a IX -a

Barem de corectare și notare

1. Rezolvați ecuația $\left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \dots + \left[x + \frac{1}{9}\right] = 50$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Soluție: Deoarece $x + \frac{1}{2} > x + \frac{1}{3} > \dots > x + \frac{1}{9} \Rightarrow \left[x + \frac{1}{2}\right] \geq \left[x + \frac{1}{3}\right] \geq \dots \geq \left[x + \frac{1}{9}\right]$, pentru orice

$x \in \mathbb{R}$. Notăm $\left[x + \frac{1}{2}\right] = k, k \in \mathbb{N}^*$ 1p

Dar $\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x + \frac{1}{9}\right) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci $\left[x + \frac{1}{i}\right] \in \{k-1, k\}, \forall i = 2, 9$ 1p

Notăm cu m numărul termenilor din membrul stâng al ecuației care sunt egali cu $k-1$, atunci vom avea $8-m$ termeni egali cu k , unde $m \in \mathbb{N}, m \leq 8$2p

Ecuația devine $m(k-1) + (8-m)k = 50 \Rightarrow 8k = 50 + m$, deci $8 \mid 50 + m$ și $m \leq 8 \Rightarrow m = 6$ prin urmare $k = 7$.

Atunci $\left[x + \frac{1}{2}\right] = \left[x + \frac{1}{3}\right] = 7$ și $\left[x + \frac{1}{4}\right] = \left[x + \frac{1}{5}\right] = \dots = \left[x + \frac{1}{9}\right] = 6$ 2p

deci $x \in \left[7 - \frac{1}{2}, 8 - \frac{1}{2}\right) \cap \left[7 - \frac{1}{3}, 8 - \frac{1}{3}\right) = \left[\frac{20}{3}, \frac{15}{2}\right)$ și

$x \in \left[6 - \frac{1}{4}, 7 - \frac{1}{4}\right) \cap \left[6 - \frac{1}{5}, 7 - \frac{1}{5}\right) \cap \dots \cap \left[6 - \frac{1}{9}, 7 - \frac{1}{9}\right) = \left[6 - \frac{1}{9}, 7 - \frac{1}{4}\right) = \left[\frac{53}{9}, \frac{27}{4}\right)$.

În concluzie $S = \left[\frac{20}{3}, \frac{15}{2}\right) \cap \left[\frac{53}{9}, \frac{27}{4}\right) = \left[\frac{20}{3}, \frac{27}{4}\right)$ 1p

2. Fie $x, y, z > 0$ cu proprietatea $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$. Arătați că:

$$\frac{x^3}{x+y} + \frac{y^3}{y+z} + \frac{z^3}{z+x} \geq \frac{3}{2}.$$

Soluție :

$$M_s^{\text{not}} = \frac{x^3}{x+y} + \frac{y^3}{y+z} + \frac{z^3}{z+x} = \frac{x^4}{x^2+xy} + \frac{y^4}{y^2+yz} + \frac{z^4}{z^2+zx} \stackrel{T.A}{\geq} \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx} \dots\dots\dots 4p$$

Dar $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow M_s \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2(x^2+y^2+z^2)} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{2} \geq \frac{3}{2}$ 2p

Are loc egalitate $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ 1p

3. Demonstrați că nu există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuațiile

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ și } 2x^2 + (b+1)x + a - 3 = 0$$

să aibă simultan soluții întregi.

Soluție:

Presupunem că există $a, b \in \mathbb{R}$ care verifică condițiile din problemă.

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ soluțiile ecuației $x^2 + ax + b = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -a \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$ și $x_1 x_2 = b \Rightarrow b \in \mathbb{Z}$

.....2p

Dacă $x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$ sunt soluțiile ecuației $2x^2 + (b+1)x + a - 3 = 0$, atunci

$$x_3 + x_4 = -\frac{b+1}{2} \Rightarrow \frac{b+1}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \text{ este impar.}$$

$$x_3 x_4 = \frac{a-3}{2} \Rightarrow \frac{a-3}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \text{ este impar.3p}$$

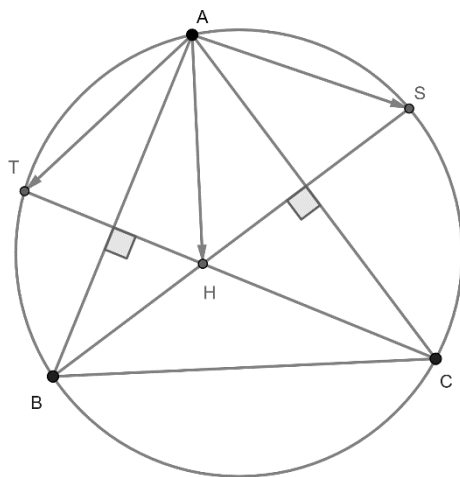
Atunci prima ecuație are toți coeficienții impari, prin urmare nu are rădăcini raționale.

Presupunerea făcută este falsă prin urmare concluzia este adevărată.....2p

4. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu ortocentrul H . Notăm cu S și T punctele de intersecție dintre semidreptele (BH) , respectiv (CH) , cu cercul circumscris triunghiului ABC .

Dacă $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AH}$, arătați că ABC este echilateral.

Soluție:



Deoarece $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AH} \Rightarrow ATHS$ este paralelogram.....1p

$\Rightarrow AS \parallel HT, HT \perp AB \Rightarrow AS \perp AB \Rightarrow BS$ este diametru.....2p

Analog $AT \parallel HS, HS \perp AC \Rightarrow AT \perp AC \Rightarrow TC$ este diametru, deci H este centru cercului circumscris triunghiului $ABC \Rightarrow \Delta ABC$ este echilateral.....4p