

**Olimpiada Națională de Matematică 2023****Etapă locală – Iași, 10 februarie 2023****Clasa a VII-a****Problema 1.**

a) Determinați mulțimea  $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{\sqrt{(4\sqrt{5}-9)^2 - 3|3\sqrt{5}-8|} - (\sqrt{5})^3}{4x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$ .

b) Dacă  $x$  și  $y$  sunt numere reale,  $x < y < 0$ , calculați  $x - y + |x| - |y| + |-x + y| - ||x| - |y||$ .

**Problema 2.** Se consideră numerele  $A = \sqrt{\frac{1}{7} + \left(\frac{9}{14} + \frac{10}{21} + \dots + \frac{70}{441}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{63}\right)}$  și

$B = \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 300}$ . Demonstrați că  $A \cdot B + \frac{1}{100}$  este număr natural.

*Supliment Gazeta Matematică nr.9/2022*

**Problema 3.** Fie  $ABC$  un triunghi având  $AB < AC$ , iar punctul  $G$  centrul său de greutate. Se consideră  $E$  simetricul punctului  $G$  față de latura  $BC$ ,  $F$  simetricul punctului  $G$  față de mijlocul  $M$  al segmentului  $BC$ ,  $\{D\} = GE \cap BC$ , iar  $H$  este mijlocul segmentului  $AE$ .

- Arătați că patrulaterul  $GHDM$  este paralelogram.
- Demonstrați că patrulaterul  $BEFC$  este trapez isoscel.
- Cunoscând că diferența dintre ariile patrulaterelor  $BEFC$  și  $GHDM$  este egală cu  $10 \text{ cm}^2$ , calculați aria triunghiului  $ABC$ .

**Problema 4.** Fie  $ABCD$  un trapez isoscel cu  $AB \parallel CD$ ,  $AB > CD$  și  $AC \cap BD = \{O\}$ . Se știe că punctele  $M, N, P$  sunt mijloacele segmentelor  $OC, OB$ , respectiv  $AD$ , iar  $MN = MP$ .

- Arătați că măsura unghiului  $\angle AOD$  este egală cu  $120^\circ$ .
- Calculați măsura unghiului  $\angle PMN$ .

*Timp de lucru: 3 ore*

*Fiecare problemă este notată cu 7p*