



Olimpiada Națională de Matematică 2023

Etapa locală – Iași, 10 februarie 2023

Clasa a XI-a

Barem de notare și evaluare

Problema 1. Fie $n \geq 1$ un număr natural.

- Care este numărul maxim de inversiuni ale unei permutări $\sigma \in S_n$?
- Care este numărul maxim de inversiuni ale unei transpoziții $\tau = (i j) \in S_n$, $1 \leq i < j \leq n$?
- Demonstrați că $m(\sigma) + m(\eta) \geq m(\sigma\eta)$, pentru orice $\sigma, \eta \in S_n$, unde prin $m(x)$ se înțelege numărul de inversiuni ale permutării $x \in S_n$.

Soluție.

a) $m(\sigma) \leq n-1 + n-2 + \dots + 1 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

Egalitatea se atinge pentru permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ (3p)

b) Inversiunile transpoziției $\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & i+2 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$ sunt $(i, i+1)$, $(i, i+2)$, $(i, i+3)$, ..., (i, j) - în număr de $j-i$ - și $(i+1, j)$, $(i+2, j)$, ..., $(j-1, j)$ - în număr de $j-i-1$. Astfel în total vor fi $m(\tau_{ij}) = 2(j-i) - 1 \leq 2(n-1) - 1 = 2n-3$. Egalitatea se atinge pentru transpoziția $\tau_{1n} = (1 n)$ (2p)

c) Dacă (i, j) , $i < j$ este inversiune pentru $\sigma\eta$ aceasta înseamnă că $\sigma(\eta(i)) > \sigma(\eta(j))$. Apar două situații posibile pentru perechea (i, j) .

Cazul I: (i, j) este inversiune pentru η și $(\eta(i), \eta(j))$ **nu** este inversiune pentru σ . În această categorie intră cel mult $m(\eta)$ perechi (i, j) .

Cazul II: (i, j) **nu** este inversiune pentru η și $(\eta(i), \eta(j))$ este inversiune pentru σ . În această categorie avem cel mult $m(\sigma)$ perechi (i, j) .

Astfel numărul total de inversiuni ale permutării $\sigma\eta$, adică $m(\sigma\eta)$, este egal cu suma cardinalelor celor două mulțimi de perechi introduse mai sus, care la rândul ei este mai mică sau egală cu $m(\sigma) + m(\eta)$, deci $m(\sigma) + m(\eta) \geq m(\sigma\eta)$ (2p)



Problema 2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea

$$G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}.$$

a) Demonstrați că, dacă $X \in G$, atunci există numerele reale a și b astfel încât

$$X = aA + (b - a)I_2.$$

b) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^2 = A + I_2$.

Gazeta Matematică

Soluție.

a) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in G$. Avem $AX = XA$ sau $\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ -x-z & -y-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & x-y \\ z-t & z-t \end{pmatrix}$, de unde $z = -y$

și $t = x - 2y$, deci $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & y \\ -y & -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-y & 0 \\ 0 & x-y \end{pmatrix} = yA + (x-y)I_2$. Prin urmare,

dacă $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in G$, atunci există numerele reale $a = y$ și $b = x$, astfel încât $X = aA + (b - a)I_2$.

.....(3p)

b) Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = A + I_2$, atunci $X^2 \cdot X = A \cdot X + X$ și $X \cdot X^2 = X \cdot A + X$, deci $AX = XA$, ceea ce înseamnă că $X \in G$. Astfel, conform subpunctului a), rezultă că $X = aA + (b - a)I_2$, unde a și b sunt două numere reale care trebuie determinate. Cum $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A$ și $A^2 = O_2$, avem:

$$X^2 = A + I_2 \Leftrightarrow (aA + (b - a)I_2)^2 = A + I_2 \Leftrightarrow a^2 A^2 + 2a(b - a)A + (b - a)^2 I_2 = A + I_2 \Leftrightarrow$$

$$2a(b - a)A + (b - a)^2 I_2 = A + I_2 \Leftrightarrow 2a(b - a) = 1 \text{ și } (b - a)^2 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ și } b = \frac{3}{2} \text{ sau } a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{și } b = -\frac{3}{2}.$$

Prin urmare, soluțiile ecuației $X^2 = A + I_2$ sunt $X = \frac{1}{2}A + I_2$ și $X = -\frac{1}{2}A - I_2$ (4p)



Problema 3. Fie n un număr natural nenul.

- a) Arătați că numărul de cifre ale lui n este egal cu $[\lg(n)]+1$, unde prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x .
- b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n}$, unde c_n reprezintă numărul de cifre ale numărului 2023^n .

Soluție.

a) Dacă notăm cu m numărul de cifre ale numărului natural nenul n , atunci $10^{m-1} \leq n < 10^m$.
Logaritmând în baza 10, obținem $m-1 \leq \lg n < m$, adică $[\lg n] = m-1$ sau $m = [\lg n] + 1$(3p)

b) Conform punctului a), pentru orice număr natural nenul n , avem:

$$c_n = [\lg(2023^n)] + 1, \text{ deci } \frac{\lg(2023^n)}{n} < \frac{c_n}{n} \leq \frac{\lg(2023^n) + 1}{n} \text{ sau } \lg 2023 < \frac{c_n}{n} \leq \lg 2023 + \frac{1}{n}, \text{ de}$$

unde, conform criteriului cleștelui, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = \lg 2023$ (4p)

Problema 4. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin recurența $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{4}{a_n} \right)$, $a_0 = 5$.

- a) Calculați a_1 .
- b) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este mărginit inferior de 2 și strict descrescător.
- c) Arătați că $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent și determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- d) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (a_n - 2)$.

Soluție.

a) $a_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(5 + \frac{4}{5} \right) = 2,9$ (1p)

b) Prin inducție, se arată că $a_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $a_{n+1} - 2 = \frac{(a_n - 2)^2}{2a_n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ și $a_0 = 5 > 2$, rezultă că $a_n > 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$(1p)

$$\text{Astfel, avem } a_{n+1} - a_n = \frac{4 - a_n^2}{2a_n} = \frac{(2 - a_n) \cdot (2 + a_n)}{2a_n} < 0 \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Deci, șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este mărginit inferior de 2 și strict descrescător..... (1p)



c) Având în vedere rezultatul de la subpunctul b), deducem, conform teoremei lui *Weierstrass*, că șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent la un număr $a \in [2, 5)$. Trecând la limită relația de recurență, obținem

$$a = \frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{4}{a} \right) \text{ sau } a = \frac{4}{a} \text{ deci } a = 2. \text{ Prin urmare, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \dots\dots\dots (3p)$$

d) Conform rezultatelor de la subpunctele b) și c), rezultă că $(a_n - 2)_{n \geq 0}$ este un șir de numere pozitive, strict descrescător și convergent la 0. Aceasta înseamnă că șirul $\left(\frac{1}{a_n - 2} \right)_{n \geq 0}$ este strict crescător și divergent la $+\infty$. Aplicând teorema *Stolz-Cesaro* obținem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n - 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{a_{n+1} - 2} - \frac{1}{a_n - 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2a_n}{(a_n - 2)^2} - \frac{1}{a_n - 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2a_n}{(a_n - 2)^2} - \frac{1}{a_n - 2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n - 2)^2}{a_n + 2} = 0 \dots\dots\dots (1p) \end{aligned}$$