



Olimpiada Națională de Matematică 2023

Etapa locală – Iași, 10 februarie 2023

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie $n \geq 1$ un număr natural.

- a) Care este numărul maxim de inversiuni ale unei permutări $\sigma \in S_n$?
- b) Care este numărul maxim de inversiuni ale unei transpoziții $\tau = (i\ j) \in S_n$, $1 \leq i < j \leq n$?
- c) Demonstrați că $m(\sigma) + m(\eta) \geq m(\sigma\eta)$, pentru orice $\sigma, \eta \in S_n$, unde prin $m(x)$ se înțelege numărul de inversiuni ale permutării $x \in S_n$.

Problema 2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea

$$G = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA \right\}.$$

- a) Demonstrați că, dacă $X \in G$, atunci există numerele reale a și b astfel încât
$$X = aA + (b - a)I_2.$$
- b) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^2 = A + I_2$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie n un număr natural nenul.

- a) Arătați că numărul de cifre ale lui n este egal cu $[\lg(n)] + 1$, unde prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x .
- b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n}$, unde c_n reprezintă numărul de cifre ale numărului 2023^n .

Problema 4. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin recurența $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{4}{a_n} \right)$, $a_0 = 5$.

- a) Calculați a_1 .
- b) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este mărginit inferior de 2 și strict descrescător.
- c) Arătați că $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent și determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- d) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (a_n - 2)$.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă este notată cu 7p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași

Tel: +40 (0)232 26 80 14

Fax: +40 (0)232 26 77 05

www.isjiasi.ro

Etapa locală ONM - Iași, 10 februarie 2023