



Olimpiada Națională de Matematică 2023

Etapa locală – Iași, 10 februarie 2023

Clasa a VII-a

Barem de notare și evaluare

Problema 1.

a) Determinați mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{\sqrt{(4\sqrt{5}-9)^2} - 3|3\sqrt{5}-8| - (\sqrt{5})^3}{4x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Dacă x și y sunt numere reale, $x < y < 0$, calculați $x - y + |x| - |y| + |-x + y| - ||x| - |y||$.

Soluție: a) $4\sqrt{5} < 9 \Rightarrow \sqrt{(4\sqrt{5}-9)^2} = |4\sqrt{5}-9| = 9-4\sqrt{5}$

$3\sqrt{5} < 8 \Rightarrow |3\sqrt{5}-8| = 8-3\sqrt{5}$ 1p

$\sqrt{(4\sqrt{5}-9)^2} - 3|3\sqrt{5}-8| - (\sqrt{5})^3 = -15$ 1p

$\frac{-15}{4x+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (4x+1) \in D_{-15}$ 1p

$A = \{-4, -1, 0, 1\}$ 1p

b) $|x| = -x$, $|y| = -y$, $|-x+y| = y-x$ 1p

$x < y < 0 \Rightarrow |x| > |y| \Rightarrow ||x| - |y|| = |x| - |y|$ 1p

Finalizare $x - y - x + y + y - x + x - y = 0$ 1p

Problema 2. Se consideră numerele $A = \sqrt{\frac{1}{7} + \left(\frac{9}{14} + \frac{10}{21} + \dots + \frac{70}{441}\right)} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{63}\right)$ și

$B = \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 300}$. Demonstrați că $A \cdot B + \frac{1}{100}$ este număr natural.

Supliment Gazeta Matematică nr. 9/2022

Soluție:

Obține $A = \sqrt{\frac{1}{7} + \left(\frac{9}{14} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{10}{21} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{70}{441} - \frac{1}{63}\right)} = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{7}}_{63 \text{ ori}}} = 3$ 3p

Obține $B = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}\right)$ 1p

Dar $B = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = \frac{33}{100}$ 2p

Finalizare $A \cdot B + \frac{1}{100} = 3 \cdot \frac{33}{100} + \frac{1}{100} = 1 \in \mathbb{N}$ 1p



Problema 3. Fie ABC un triunghi având $AB < AC$, iar punctul G centrul său de greutate. Se consideră E simetricul punctului G față de latura BC , F simetricul punctului G față de mijlocul M al segmentului BC , $\{D\} = GE \cap BC$, iar H este mijlocul segmentului AE .

- Arătați că patrulaterul $GHDM$ este paralelogram.
- Demonstrați că patrulaterul $BEFC$ este trapez isoscel.
- Cunoscând că diferența dintre ariile patrulaterelor $BEFC$ și $GHDM$ este egală cu 10 cm^2 , calculați aria triunghiului ABC .

Soluție:

- GH este linie mijlocie în $\triangle AEF$, deci $GH \parallel EF, GH = \frac{EF}{2}$ 1p
 DM este linie mijlocie în $\triangle GEF$, deci $DM \parallel EF, DM = \frac{EF}{2}$ 1p
 Cum $GH \parallel DM$ și $GH = DM \Rightarrow GHDM$ este paralelogram1p
- $GM = MF$ și $BM = MC$ rezultă $BGCF$ paralelogram, deci $BG = CF$ 1p
 Se arată că triunghiul GBE este isoscel, de unde rezultă că $BG = BE$ și cum avem evident faptul că $EF \parallel BC$, $BEFC$ este trapez isoscel.1p
- $A_{BEFC} = \frac{(EF + BC) \cdot DE}{2} = \frac{EF \cdot DE}{2} + \frac{BC \cdot DE}{2}$
 $A_{GHDM} = GD \cdot DM = GD \cdot \frac{EF}{2} = \frac{EF \cdot DE}{2}$, deci $A_{BEFC} = A_{GHDM} + A_{BCG}$ 1p
 $A_{BCG} = 10\text{ cm}^2 = \frac{1}{3} \cdot A_{\triangle ABC} \Rightarrow A_{\triangle ABC} = 30\text{ cm}^2$ 1p

Problema 4. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Se știe că punctele M, N, P sunt mijloacele segmentelor OC, OB , respectiv AD , iar $MN = MP$.

- Arătați că măsura unghiului $\sphericalangle AOD$ este egală cu 120° .
- Calculați măsura unghiului $\sphericalangle PMN$.

Soluție:

- MN este linie mijlocie în $\triangle BOC \Rightarrow MN = \frac{BC}{2}$ 1p
 Și cum $MP = MN \Rightarrow MP = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2}$, deci cum MP este mediană în $\triangle DMA \Rightarrow \sphericalangle DMA = 90^\circ$ 1p
 DM este înălțime și mediană în $\triangle DOC$, deci $\triangle DOC$ este isoscel cu $DO = DC$ 1p
 Dar trapezul $ABCD$ este isoscel, așa că $DO = OC$. Prin urmare, $\triangle DOC$ este echilateral $\Rightarrow \sphericalangle AOD = 120^\circ$ 1p
- $\sphericalangle PMN = \sphericalangle PMA + \sphericalangle AMN$. Cum $MN \parallel BC \Rightarrow \sphericalangle AMN = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ 1p
 $MP = PA \Rightarrow \sphericalangle PMA = \sphericalangle PAM$. În $\triangle AOD$, $\sphericalangle PAM + \sphericalangle ADB = 60^\circ$, întrucât $\sphericalangle AOD = 120^\circ$.
 În concluzie, $\sphericalangle PMN = 60^\circ$ 2p