



## Olimpiada Națională de Matematică 2023

Etapă locală – Iași, 10 februarie 2023

Clasa a VIII-a

Barem de notare și evaluare

**Problema 1.** Determinați cea mai mică valoare a numărului real  $x$  având proprietatea că există un număr real  $y$  astfel încât  $4x^2 + y^2 + 4x - 4y + 1 = 0$ .

**Soluție:** Egalitatea din enunț se scrie sub forma  $(2x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$  .....2p

Cum  $(y-2)^2 \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$ , rezultă că  $(2x+1)^2 \leq 4$ . Atunci  $|2x+1| \leq 2$ , prin urmare  $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , deci

numărul  $x$  nu poate fi mai mic decât  $-\frac{3}{2}$  .....3p

Pentru  $x = -\frac{3}{2}$ , există  $y = 2$  astfel încât  $4x^2 + y^2 + 4x - 4y + 1 = 0$ , așadar cea mai mică valoare a

numărului real  $x$  având proprietatea din enunț este  $-\frac{3}{2}$  .....2p

**Problema 2.** Se consideră patru puncte necoplanare  $A, B, C$  și  $D$  astfel încât  $AC=BC$ , iar planele  $(ABC)$  și  $(ABD)$  sunt perpendiculare. Dacă  $BD=CM$ , unde  $M$  este mijlocul segmentului  $AD$ , determinați măsura unghiului dintre dreptele  $BD$  și  $CM$ .

*Supliment Gazeta Matematică 10/2022*

**Soluție:**

Notăm cu  $N$  mijlocul segmentului  $AB$ .  $MN$  este linie mijlocie în  $\triangle ABD$ , așadar  $MN \parallel BD$ . Deducem că

$\angle(BD, CM) = \angle(MN, CM) = \angle CMN$  .....2p

În  $\triangle ABC$  isoscel, segmentul  $CN$  este mediana bazei, prin urmare  $CN \perp AB$  .....1p

Dar  $AB = (ABC) \cap (ABD)$  și  $(ABC) \perp (ABD)$ , deci  $CN \perp (ABD)$ . Rezultă că  $CN \perp MN$  .....2p

Observăm că în triunghiul dreptunghic  $NMC$  avem  $MN = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}CM$ , de unde  $\angle MCN = 30^\circ$  și atunci

$\angle CMN = 60^\circ$  .....2p



**Problema 3** Fie  $VABC$  o piramidă triunghiulară regulată. Notăm cu  $O$  centrul bazei  $ABC$ , cu  $M$  mijlocul muchiei  $AB$  și cu  $S, T$  proiecțiile punctului  $O$  pe planele  $(VAB)$ , respectiv  $(VBC)$ .

- Arătați că punctul  $S$  aparține dreptei  $VM$ .
- Demonstrați că dreptele  $ST$  și  $VB$  sunt perpendiculare.
- Apotema bazei este  $OM = 12$  cm, iar apotema piramidei este  $VM = 20$  cm. Determinați lungimea proiecției segmentului  $ST$  pe planul  $(ABC)$ .

**Soluție:**

- Fie  $S'$  proiecția punctului  $O$  pe dreapta  $VM$ . Cum  $AB \perp (VOM)$ , rezultă că  $AB \perp OS'$ . Atunci  $OS' \perp (VAB)$ , prin urmare punctele  $S$  și  $S'$  coincid ..... **1p**
- Avem  $OS \perp (VAB) \Rightarrow OS \perp VB$ ;  $OT \perp (VBC) \Rightarrow OT \perp VB$ . Atunci  $VB \perp (OST)$ , deci  $VB \perp ST$  .. **2p**
- Folosind teorema catetei în triunghiul dreptunghic  $VOM$  obținem că  $\frac{VS}{SM} = \frac{VO^2}{OM^2}$ . Analog se arată că

$$\frac{VT}{TN} = \frac{VO^2}{ON^2} = \frac{VS}{SM} \quad (\text{unde } N \text{ este mijlocul muchiei } BC). \text{ Rezultă, conform reciprocei teoremei lui}$$

Thales, că dreptele  $ST$  și  $MN$  sunt paralele, prin urmare  $ST \parallel (ABC)$ . Atunci lungimea proiecției segmentului  $ST$  pe planul  $(ABC)$  este egală cu lungimea segmentului  $ST$ ..... **2p**

Am văzut mai sus că  $\frac{VS}{SM} = \frac{VO^2}{OM^2} = \frac{16}{9}$ . Din asemănarea triunghiurilor  $VST$  și  $VMN$  obținem că

$$ST = \frac{VS}{VM} \cdot MN = \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{2} AC = \frac{192\sqrt{3}}{25} \text{ cm.} \dots\dots\dots \textbf{2p}$$

**Problema 4.** Fie  $x, y$  și  $z$  trei numere reale din intervalul  $[0, 2]$  astfel încât

$$xyz = (2-x)(2-y)(2-z).$$

Demonstrați că cel puțin unul dintre numerele  $x(2-y)$ ,  $y(2-z)$  și  $z(2-x)$  este mai mare sau egal cu 1.

**Soluție:** Folosind inegalitatea mediilor, obținem

$$xyz = \sqrt{x(2-x)} \cdot \sqrt{y(2-y)} \cdot \sqrt{z(2-z)} \leq \frac{x+(2-x)}{2} \cdot \frac{y+(2-y)}{2} \cdot \frac{z+(2-z)}{2} = 1 \dots\dots\dots \textbf{3p}$$

După calcule, relația din enunț conduce la  $xyz = 4 - x(2-y) - y(2-z) - z(2-x)$ . Rezultă că

$$x(2-y) + y(2-z) + z(2-x) = 4 - xyz \geq 3 \dots\dots\dots \textbf{2p}$$

Dacă, prin absurd, numerele nenegative  $x(2-y)$ ,  $y(2-z)$  și  $z(2-x)$  ar fi subunitare, suma lor ar fi strict mai mică decât 3, contradicție. Rezultă că cel puțin unul dintre numerele  $x(2-y)$ ,  $y(2-z)$  și  $z(2-x)$  este mai mare sau egal cu 1. .... **2p**