

A 73-a olimpiadă Națională de Matematică
Etapă zonală, 11 februarie 2023

Clasa a V-a
Soluții și bareme

Problema 1. Fie numărul $x = (1 + 2 + 2^2)^{13} : 49^5 - (1 + 2 + 3 + \dots + 49 + 50) : 25$.

a) Calculați valoarea lui x .

b) Arătați că produsul cifrelor numărului x este pătrat perfect.

Istók Éva,

Soluție

a) $(1 + 2 + 2^2)^{13} = (1 + 2 + 4)^{13} = 7^{13}$ **1p**

$49^5 = (7^2)^5 = 7^{10}$ **1p**

$1 + 2 + 3 + \dots + 49 + 50 = 51 \cdot 25$ **2p**

$x = 7^{13} : 7^{10} - (51 \cdot 25) : 25$ **1p**

$x = 7^3 - 51 = 343 - 51 = 292$ **1p**

b) Produsul cifrelor este $= 2 \cdot 9 \cdot 2 = 36 = 6^2$, deci este pătrat perfect. **1p**

Problema 2. Într-un număr natural de două cifre cifra unităților este cu 2 mai mare decât cifra zecilor. Suma dintre numărul cu două cifre și oglinditul său (adică numărul cu cifrele inversate) este 176. Determinați acest număr natural de două cifre.

Kiss Magdolna

Soluție

Fie numărul de două cifre \overline{ab} cu $b = a + 2$

$\overline{ab} + \overline{ba} = 176$ **1p**

$10a + b + 10b + a = 176 \Leftrightarrow 11a + 11b = 176 \Leftrightarrow a + b = 16$ **3p**

$a + b = 16$ și $b = a + 2$, cu a și b cifre, rezultă $b = 9, a = 7$ (se verifică unicitatea soluției, sau se determină a și b prin metoda grafică) **2p**

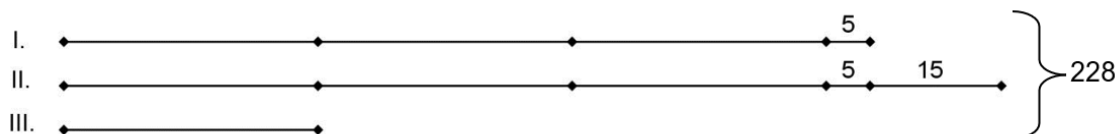
Verificare $79 + 97 = 176$ Răspuns: numărul căutat este 79 **1p**

Problema 3.

Suma a trei numere naturale este 228. Determinați cele trei numere, dacă triplul celui de-al treilea număr este cu 5 mai mic decât primul număr și al doilea număr este cu 15 mai mare decât primul.

Mîndru Camelia, Toplița

Soluție Realizarea figurii **2p**



$[228 - (5 + 5 + 15)] : 7 = 203 : 7 = 29$ al III-lea număr **2p**

$3 \cdot 29 + 20 = 87 + 20 = 107$ al II-lea număr **1p**

$107 - 15 = 92$ primul număr **1p**

Verificare: $92 + 107 + 29 = 228$; $3 \cdot 29 = 87 = 92 - 5$; $92 + 15 = 107$ Răspuns: cele trei numere sunt 92, 107 și 29 **1p**

Problema 4. Fie numărul $A = 1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + \dots + 8^{2023} + 9^{2023}$. Demonstrați că numărul A se divide cu 5.

(Gazeta Matematică)

Soluție Un număr este divizibil cu 5, dacă are ultima cifră 0 sau 5. Se vor verifica ultimele cifre ale puterilor din sumă. **1p**

$u(1^{2023}) = 1, u(5^{2023}) = 5, u(6^{2023}) = 6$ **1p**

Ultima cifră a pătratelor perfecte depinde de paritatea exponentului, 2023 nr impar. $u(4^{2k+1}) = 4, u(9^{2k+1}) = 9$ **1p**

$2023 = 4 \cdot 505 + 3$ $u(2^{2023}) = 8, u(3^{2023}) = 7, u(7^{2023}) = 3, u(8^{2023}) = 2$ **2p**

$u(A) = u(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) = u(45) = 5$, deci A este divizibil cu 5. **2p**