

**73. Országos Matematika Olimpia  
Körzeti szakasz, 2023. február 11.****XI. osztály****1. feladat.**

Bizonyítsd be, hogy a

$$\Delta = \begin{vmatrix} b^2c^2 & c^2a^2 & a^2b^2 \\ b^2 + bc + c^2 & c^2 + ca + a^2 & a^2 + ab + b^2 \\ b + c & c + a & a + b \end{vmatrix}$$

determináns osztható  $(ab + bc + ca)^2$ -nel, bármely  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  esetén.

**2. feladat.**

Legyenek  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ . Bizonyítsd be, hogy

- (a) az  $AB - BA = I_2$  egyenlőség nem teljesülhet;
- (b) ha  $(AB - BA)^{2022} = I_2$ , akkor  $(AB - BA)^2 = I_2$ .

**3. feladat.**

Számítsd ki:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \frac{3}{8} - \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + 4} \right).$$

*Gazeta Matematică*

**4. feladat.**

Adott az  $(x_n)_{n \geq 1}$  sorozat, ahol  $x_1 \in (0, 1)$  és

$$x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) Tanulmányozd az  $(x_n)_{n \geq 1}$  sorozat konvergenciáját és konvergencia esetén határozd meg a sorozat határértékét!
- b) Számítsd ki:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n.$$

*Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!*

*Munkaidő 3 óra.*

*Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk.*