

Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 11.02.2023

Clasa a VII-a

Problema 1.

Se dau numerele:

$$a = 2\sqrt{6}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{3}}\right) + 3|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}|$$

$$b = 2|3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}| - 3\sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2} + 1$$

a) Arătați că numărul $a < 0$.

b) Arătați că $b = 1 - \sqrt{2}$.

c) Calculați $(a - b)^{2023}$.

Problema 2.

Arătați că, pentru orice n număr natural are loc inegalitatea:

$$\frac{8}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{16}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{24}{5^2 \cdot 7^2} + \dots + \frac{8n}{(2n-1)^2 \cdot (2n+1)^2} < 1.$$

Problema 3.

În triunghiul isoscel ABC cu $[AB] \equiv [AC]$, bisectoarea unghiului BAC intersectează perpendiculara în B pe $[AB]$ în punctul M , iar paralela dusă prin M la AB intersectează perpendiculara în A pe AB în punctul N .

a) Realizați desenul corespunzător enunțului.

b) Arătați că $CN \perp BC$.

c) Stabiliți natura patrulaterului $AMCN$.

Problema 4.

Fie $ABCD$ un pătrat și punctele E, F, G, H mijloacele laturilor AB, BC, CD și DA iar Q un punct oarecare situat în interiorul pătratului. Construim punctele P, R, S, T simetricele lui Q față de E, F, G și respectiv H .

a) Demonstrați că punctele P, R, S, T sunt pe un cerc \mathcal{C} (conciclice);

b) Arătați că centrul cercului \mathcal{C} este simetricul lui Q față de centrul O al pătratului $ABCD$.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

SUCCES!