

Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 11.02.2023

Clasa a VIII-a

Problema 1.

Arătați că, pentru orice număr întreg n , numărul $n^5 - 16n$ este multiplu de 15.

Problema 2.

Fie x și y două numere reale astfel încât $x + 1 = 4y$.

a) Demonstrați că dacă $x \in [-1, 3]$, atunci $y \in [0, 1]$.

b) Arătați că dacă $x \in [-1, 3]$, atunci

$$\sqrt{x^2 + 2x + y^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + y^2 - 2y + 10} = \sqrt{17}$$

Problema 3.

În vârfurile dreptunghiului $ABCD$ se construiesc dreptele AA' , BB' , CC' și DD' , perpendiculare pe planul dreptunghiului. Punctele A' , B' , C' și D' sunt de aceeași parte a planului dreptunghiului, astfel încât $AA' = DD'$, $BB' = CC'$ și $BB' = 2AA'$.

a) Demonstrați că punctele A' , B' , C' și D' sunt vârfurile unui dreptunghi.

b) Dacă M este punctul de intersecție a dreptelor AB și $A'B'$, iar N este punctul de intersecție a dreptelor CD și $C'D'$, determinați intersecția planelor $(BB'N)$, $(CC'M)$ și $(AA'D')$.

Problema 4.

Se consideră punctul A exterior planului triunghiului echilateral BCD de latură 4 cm, astfel încât $AB = AC = AD = \sqrt{6}$ cm.

a) Dacă M este mijlocul segmentului CD , determinați raportul dintre :
triunghiului ABC și aria triunghiului ABM .

b) Determinați poziția punctului P , situat pe segmentul CD , astfel încât :
triunghiului ABP să fie minimă.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

SUCCES!