

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - VRANCEA

9 februarie 2025

BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE - Clasa a XII-a

SUBIECTUL 1. Se consideră funcțiile $f, F : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(7x)}{\sin x}$ și

$$F(x) = x + \sin(2x) + \frac{1}{2}\sin(4x) + \frac{1}{3}\sin(6x). \text{ Arătați că : } \int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C}.$$

(G.M. - Supliment)

$$F'(x) = x + 2\cos(2x) + 2\cos(4x) + 2\cos(6x) \dots\dots\dots 1p$$

$$\sin x \cdot F'(x) = \sin x + 2\sin x \cdot \cos(2x) + 2\sin x \cdot \cos(4x) + 2\sin x \cdot \cos(6x) \dots\dots\dots 2p$$

$$2\sin a \cdot \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Finalizare} \dots\dots\dots 3p$$

SUBIECTUL 2. Calculați : $\int \frac{dx}{\sin(x+2) \cdot \sin(x+3)}$; $x \in (-2; 0)$ (Manual , cls. a XII-a)

$$f(x) = \frac{1}{\sin 1} \cdot \frac{\sin[(x+3) - (x+2)]}{\sin(x+3) \cdot \sin(x+2)} \dots\dots\dots 3p$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin 1} \cdot \frac{\sin(x+3) \cdot \cos(x+2) - \cos(x+3) \cdot \sin(x+2)}{\sin(x+3) \cdot \sin(x+2)} \dots\dots\dots 1p$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin 1} \cdot \left[\frac{\cos(x+2)}{\sin(x+2)} - \frac{\cos(x+3)}{\sin(x+3)} \right] \dots\dots\dots 1p$$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{\sin 1} \cdot \ln \left(\frac{\sin(x+2)}{\sin(x+3)} \right) + \mathcal{C} \dots\dots\dots 2p$$

SUBIECTUL 3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $M = \{a \cdot A + b \cdot I_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) Arătați că $A^2 = 5A - 7I_2$.

b) Arătați că $X \cdot Y \in M$, $(\forall) X, Y \in M$.

c) Demonstrați că $(M \setminus \{O_2\}; \cdot)$ este grup de matrice.

$$\text{a) Rel. Cayley-Hamilton : } A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 = 5A - 7I_2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{b) Fie } X = a \cdot A + b \cdot I_2, Y = c \cdot A + d \cdot I_2, a, b, c, d \in \mathbb{R}. \text{ Atunci : } X \cdot Y = acA^2 + (ad + bc)A + bdI_2 =$$

$$= ac(5A - 7I_2) + (ad + bc)A + bdI_2 = (5ac + ad + bc)A + (bd - 7ac)I_2 \in M \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{c) Fie } X = a \cdot A + b \cdot I_2 \Rightarrow \det(X) = 7a^2 + 5ab + b^2.$$

$$\det(X) = 0 \Rightarrow 7a^2 + 5ab + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow X = O_2 \dots\dots\dots 1p$$

Dacă $X, Y \neq O_2 \Rightarrow X \cdot Y \neq O_2 \Rightarrow X \cdot Y \in M \setminus \{O_2\}$ deci înmulțirea este lege de compoziție..... 1p

Înmulțirea este asociativă iar elementul neutru este $I_2 = 0 \cdot A + 1 \cdot I_2 \in M \setminus \{O_2\}$ 1p

Dacă $X = a \cdot A + b \cdot I_2 \neq O_2 (a \neq 0, b \neq 0)$ găsim matricea $Y = c \cdot A + d \cdot I_2 \neq O_2$ cu elementele

$$c = \frac{-a}{7a^2 + 5ab + b^2}; d = \frac{b + 5a}{7a^2 + 5ab + b^2} \text{ astfel încât } X \cdot Y = Y \cdot X = I_2 \text{ deci } X = \text{invertibilă} \dots\dots\dots 1p$$

4) Se consideră grupul $(H, *)$, unde $H \subset (0, +\infty)$ este o mulțime care verifică condițiile :

i) $x \in H \Rightarrow \frac{1}{x} \in H$ și ii) $2025 \in H$. Știind că $x * y = \frac{1}{x} * \frac{1}{y}, (\forall) x, y \in H$, arătați că :

a) $1 \notin H$;

b) $(x * x) \cdot \left(x * \frac{1}{x}\right) = 1$, pentru orice $x \in H$;

c) există un grup care verifică toate proprietățile din enunț .

a) Dacă $1 \in H$, cf. ipotezei $\Rightarrow x * 1 = \frac{1}{x} * 1$, iar prin simplificare, la dreapta, cu 1' obținem :

$$x = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, (\forall) x \in H \text{ adică } H = \{1\}, \text{ contradicție cu } 2025 \in H \dots\dots\dots 2p$$

b) Fie $e \in H$, elementul neutru al grupului $(H, *)$, conform i) $\Rightarrow \frac{1}{e} \in H$.

Pentru $y = \frac{1}{e}$ în ipoteză $\Rightarrow x * \frac{1}{e} = \frac{1}{x}, (\forall) x \in H$ și alegând $x \rightarrow (x * x)$ obținem :

$$\frac{1}{x * x} = (x * x) * \frac{1}{e} = x * \left(x * \frac{1}{e}\right) = x * \frac{1}{x} \text{ și de aici rezultă că : } (x * x) \cdot \left(x * \frac{1}{x}\right) = 1, (\forall) x \in H \dots\dots\dots 2p$$

c) Fie $H = (0; +\infty) \setminus \{1\}$ și $x * y = x^{\ln y}$. $(H; \cdot)$ este grup care verifică proprietățile din enunț 3p