

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

### ETAPA LOCALĂ – VRANCEA

9 februarie 2025

CLASA a V-a

### BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE

#### SUBIECTUL 1

Determinați suma tuturor resturilor împărțirilor la 45 ale numerelor naturale  $n$ , cu proprietatea că  $1 \leq n \leq 2025$ .

##### Soluție

Resturi posibile: 0, 1, 2, 3, ..., 44	... 1 p
$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 44 = 44 \cdot 45 : 2 = 990$	... 2 p
$1 \leq n \leq 2025$ sunt 2025 numere	... 1 p
$2025 : 45 = 45$ sunt 45 de grupe de numere cu suma resturilor 990	... 2 p
Suma = $45 \cdot 990 = 44550$	... 1 p

#### SUBIECTUL 2

- a) Comparați numerele  $5^{867}$  și  $2^{2024}$ .  
b) Scrieți numărul  $10^{11}$  ca sumă de patru cuburi perfecte.

Supliment *Gazeta Matematică*

##### Soluție

a)	
$5^{867} = (5^3)^{289} = 125^{289}$	... 1 p
$2^{2024} = (2^7)^{289} \cdot 2 = 128^{289} \cdot 2$	... 1 p
$125^{289} < 128^{289} \cdot 2$	... 1 p
$5^{867} < 2^{2024}$	... 1 p
b)	
$10^{11} = 100 \cdot 10^9$	... 1 p
$100 = 1 + 8 + 27 + 64$	... 1 p
$10^{11} = (10^3)^3 + (2 \cdot 10^3)^3 + (3 \cdot 10^3)^3 + (4 \cdot 10^3)^3$	... 1 p

#### SUBIECTUL 3

Dacă  $3^{12n+18} + 9^{6n+9} + 27^{4n+6} = 3^{11(n+185)+9}$ , aflați  $n$  și arătați că numărul  $A = (n-2)^n + (n-1)^n + n^n$  nu este pătrat perfect.

##### Soluție

$3^{12n+18} + (3^2)^{6n+9} + (3^3)^{4n+6} = 3^{11n+2035+9}$	... 2 p
$3^{12n+18} + 3^{12n+18} + 3^{12n+18} = 3^{11n+2044}$ ; $n = 2025$	... 2 p
$A = 2023^{2025} + 2024^{2025} + 2025^{2025}$	
$u(A) = u(u(3^{2025}) + u(4^{2025}) + u(5^{2025})) = u(3 + 4 + 5) = 2$	... 2 p
$u(A) = 2 \Rightarrow A$ nu este p.p.	... 1 p

**SUBIECTUL 4**

Fie șirul de numere naturale:

1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 25, ..., 2021, 2022, 2023, 2024, 2025.

- a) Aflați numărul termenilor șirului.  
b) Calculați suma termenilor șirului.

**Soluție**

a)

Completăm șirul cu

6, 7, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 19, 20, ..., 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, de la 1 la 2030  
sunt 2030 numere.

2030: 10 = 203 grupe de câte 10

... 1p

Din cele 10 numere, 5 sunt în șir și 5 adăugate

... 1p

203 · 5 = 1015 termeni sunt în șir

... 1p

b)

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (11 + 12 + 13 + 14 + 15) + (21 + 22 + 23 + 24 + 25) \\ + \dots + (2021 + 2022 + 2023 + 2024 + 2025) =$$

$$15 + (15 + 50) + (15 + 50 \cdot 2) + (15 + 50 \cdot 3) + \dots + (15 + 50 \cdot 202) =$$

... 2p

$$15 \cdot 203 + 50 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 202) =$$

... 1p

$$3045 + 50 \cdot 20503 = 1028195$$

... 1p