

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 15 februarie 2025
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VII-a

1. Fie suma: $S = \sqrt{605} + \sqrt{2420} + \sqrt{5445} + \dots + \sqrt{49005}$.

a) (3p) Aflați câți termeni are suma S.

b) (4p) Restrângeți suma S și aflați care sunt ultimele două cifre ale numărului S^2 .

Supliment Gazeta Matematică Nr.11/2024

Soluție:

a) $\sqrt{605} = \sqrt{5 \cdot 11^2 \cdot 1^2}$, $\sqrt{2420} = \sqrt{5 \cdot 11^2 \cdot 2^2}$, $\sqrt{5445} = \sqrt{5 \cdot 11^2 \cdot 3^2}$, ..., $\sqrt{49005} = \sqrt{5 \cdot 11^2 \cdot 9^2}$.

Suma S are 9 termeni.

b) $S = 11\sqrt{5} + 22\sqrt{5} + 33\sqrt{5} + \dots + 99\sqrt{5}$

$$S = 11\sqrt{5} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9)$$

$$S = 11\sqrt{5} \cdot 45 = 495\sqrt{5}$$

$S^2 = 495^2 \cdot 5$ are ultimele două cifre 25.

Barem:

a) $\sqrt{605} = \sqrt{5 \cdot 11^2 \cdot 1^2}$, $\sqrt{2420} = \sqrt{5 \cdot 11^2 \cdot 2^2}$, $\sqrt{5445} = \sqrt{5 \cdot 11^2 \cdot 3^2}$, ..., $\sqrt{49005} = \sqrt{5 \cdot 11^2 \cdot 9^2}$	2 p
Suma S are 9 termeni.	1 p
b) $S = 11\sqrt{5} + 22\sqrt{5} + 33\sqrt{5} + \dots + 99\sqrt{5}$	1 p
$S = 11\sqrt{5} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9)$	1 p
$S = 11\sqrt{5} \cdot 45 = 495\sqrt{5}$	1 p
$S^2 = 495^2 \cdot 5$ are ultimele două cifre 25	1 p

2. a) (3p) Arătați că: $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$, pentru orice numere reale pozitive $a \neq b$.

b) (4p) Determinați numerele raționale x, y pentru care are loc egalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt{3} + 1} - \sqrt{3} \cdot (3 - x) = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + |3 - y|.$$

Tamara Brutaru, Suceava

Soluție:

a) Calculând produsul $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - \sqrt{a \cdot b} + \sqrt{a \cdot b} - b = a - b$, obținem

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

b) Din a) pentru $a=3$ și $b=1$ avem $\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Înlocuind obținem:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{3}x = |1-\sqrt{3}| + |3-y|. \text{ Cum } |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1, \text{ egalitatea devine: } \sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right) = |3-y| - \frac{1}{2}.$$

Cum $y \in \mathbb{Q}_+ \Rightarrow |3-y| - \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}_+ \Rightarrow \sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right) \in \mathbb{Q}_+ \quad (1)$, dar $x \in \mathbb{Q}_+ \Rightarrow x - \frac{7}{2} \in \mathbb{Q}_+$ și din (1), cum

$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}_+$, rezultă că $x - \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$, de unde $|3-y| - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow |3-y| = \frac{1}{2}$. Ecuația are două soluții:

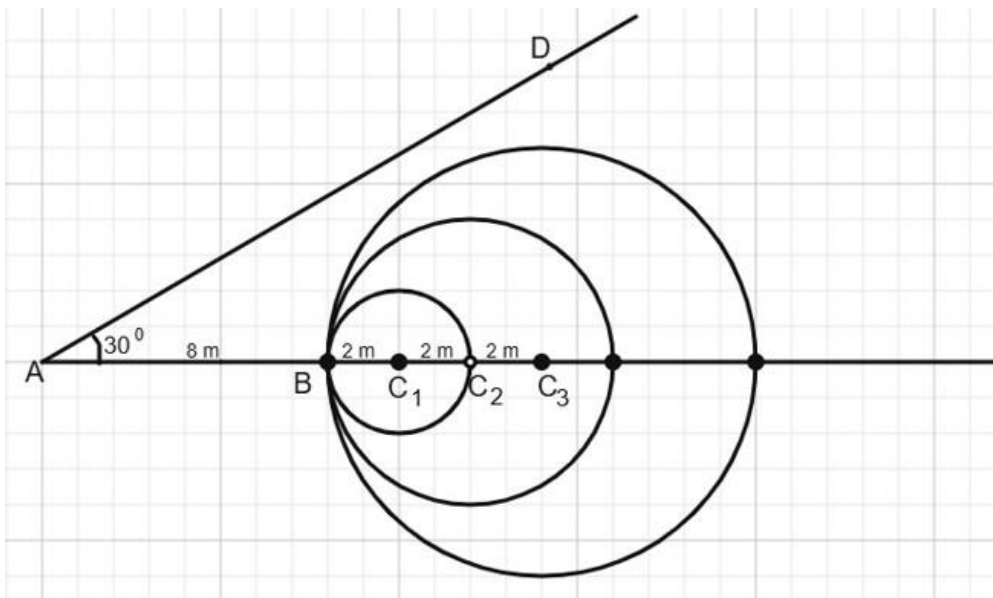
$$y = \frac{5}{2} \text{ și } y = \frac{7}{2}$$

Barem:

a) $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - \sqrt{a \cdot b} + \sqrt{a \cdot b} - b = a - b$	2 p
$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$	1 p
b) Din a) pentru $a=3$ și $b=1$ avem $\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$	1 p
Înlocuind obținem: $\frac{\sqrt{3}-1}{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{3}x = 1-\sqrt{3} + 3-y $. Cum $ 1-\sqrt{3} = \sqrt{3}-1$, egalitatea devine: $\sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right) = 3-y - \frac{1}{2}$.	1 p
Cum $y \in \mathbb{Q}_+ \Rightarrow 3-y - \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}_+ \Rightarrow \sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right) \in \mathbb{Q}_+ \quad (1)$, dar $x \in \mathbb{Q}_+ \Rightarrow x - \frac{7}{2} \in \mathbb{Q}_+$ și din (1), cum $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}_+$, rezultă că $x - \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$.	1 p
$ 3-y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 3-y = \frac{1}{2}$. Ecuația are două soluții: $y = \frac{5}{2}$ și $y = \frac{7}{2}$	1 p

3. Figura de mai jos, modelează zborul unei muște în apropierea unei clădiri a cărei perete este reprezentat de dreapta AD . Musca pornește din B și descrie cercul de centru C_1 în sensul acelor de ceas. Apoi din B descrie cercul de centru C_2 în același sens, apoi cercul de centru C_3, C_4, \dots, C_n , toate aceste centre fiind coliniare cu A și situate la 2 m unul de celălalt. Musca se oprește din zbor în clipa în care atinge peretele. Știind că $\angle DAB = 30^\circ$ și $d(A, B) = 8\text{ m}$, aflați:

- a) (3p) Care este centrul cercului pe care se situează musca în clipa în care se oprește din zbor?
b) (4p) Care a fost lungimea zborului?



Soluție:

a) Zborul se oprește când traiectoria coincide cu cercul tangent lui AD . Dacă C_n este centrul acestui cerc, atunci $d(C_n, AD)$ este raza acestui cerc și este egală cu $\frac{AC_n}{2}$ (teorema unghiului de 30° într-un triunghi dreptunghic). Dar $AC_n = AB + BC_n$, dar raza este egală și cu BC_n , adică cu $2n$. Obținem ecuația $2n = \frac{8+2n}{2} \Leftrightarrow n = 4$, centrul este C_4 .

b) Musca parcurge complet primele 3 cercuri și $\frac{1}{6}$ din al patrulea cerc, adică lungimea zborului este:

$$2\pi \cdot 2 + 2\pi \cdot 4 + 2\pi \cdot 6 + \frac{16\pi}{6} = \frac{80\pi}{3}.$$

Barem:

a) Zborul se oprește când traiectoria coincide cu cercul tangent lui AD	1p
C_n este centrul acestui cerc, atunci $d(C_n, AD)$ este raza acestui cerc și este egală cu $\frac{AC_n}{2}$ (teorema unghiului de 30° într-un triunghi dreptunghic). Dar $AC_n = AB + BC_n$, dar raza este egală și cu $BC_n = 2n$	1p
Rezolvă ecuația $2n = \frac{8+2n}{2} \Leftrightarrow n = 4$, centrul este C_4 .	1p
b) Musca parcurge complet primele 3 cercuri și $\frac{1}{6}$ din al patrulea cerc	2p
lungimea zborului este: $2\pi \cdot 2 + 2\pi \cdot 4 + 2\pi \cdot 6 + \frac{16\pi}{6} = \frac{80\pi}{3}$.	2p

4. Fie pătratul ABCD și M un punct pe latura BC. De aceeași parte a dreptei AB se construiește pătratul AMNP.

a) (3p) Arătați că punctele P,D,C sunt coliniare.

b) (4p) Demonstrați că dreptele AC și CN sunt perpendiculare.

Soluție:

a) Cum ABCD și AMNP sunt pătrate, $\sphericalangle BAM + \sphericalangle DAC = \sphericalangle DAC + \sphericalangle DAP = 90^\circ$, de unde $\sphericalangle BAM = \sphericalangle DAP$, dar $AB=AD$ și $AM=AP$, deci $\triangle MAB \equiv \triangle PAD$ (L.U.L.) (1). Din (1) rezultă $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ADP = 90^\circ$, dar $\sphericalangle ADC = 90^\circ$, deci $\sphericalangle PDC = 180^\circ \Rightarrow$ punctele P,D,C sunt coliniare.

b) Fie $NQ \perp DC$, $Q \in DC$. Cum $\sphericalangle MAB = \sphericalangle NPQ$ (unghiuri cu laturi paralele) și $AM=PN$, atunci triunghiurile dreptunghice $\triangle MAB \equiv \triangle NPQ$ (I.U.), de unde $MB=NQ$ (2) și $AB=PQ$.

Din $AB=PQ$ și $AB=DC$ avem $PQ=DC$, de unde $PD+DQ=DQ+QC$, deci $PD=QC$ (3).

Din (1) rezultă $PD=MB$, cum $PD=QC$ (3) și $MB=NQ$ (2), deducem că $NQ=QC$.

Triunghiul $\triangle NQC$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle NCQ = 45^\circ$, dar $\sphericalangle DCA = 45^\circ$ (AC este diagonală în pătrat), deci $\sphericalangle NCA = 90^\circ$, de unde dreptele AC și CN sunt perpendiculare.

Barem:

a) Cum ABCD și AMNP sunt pătrate, $\sphericalangle BAM + \sphericalangle DAC = \sphericalangle DAC + \sphericalangle DAP = 90^\circ$, de unde $\sphericalangle BAM = \sphericalangle DAP$	1 p
$\sphericalangle BAM = \sphericalangle DAP$, $AB=AD$ și $AM=AP$, deci $\triangle MAB \equiv \triangle PAD$ (L.U.L.) (1).	1 p
Din (1) rezultă $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ADP = 90^\circ$, dar $\sphericalangle ADC = 90^\circ$, deci $\sphericalangle PDC = 180^\circ \Rightarrow$ punctele P,D,C sunt coliniare	1 p
b) Fie $NQ \perp DC$, $Q \in DC$. Cum $\sphericalangle MAB = \sphericalangle NPQ$ (unghiuri cu laturi paralele) și $AM=PN$, atunci triunghiurile dreptunghice $\triangle MAB \equiv \triangle NPQ$ (I.U.), de unde $MB=NQ$ (2) și $AB=PQ$	1 p
Din $AB=PQ$ și $AB=DC$ avem $PQ=DC$, de unde $PD+DQ=DQ+QC$, deci $PD=QC$ (3).	1 p
Din (1) rezultă $PD=MB$, cum $PD=QC$ (3) și $MB=NQ$ (2), deducem că $NQ=QC$.	1 p
Triunghiul $\triangle NQC$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle NCQ = 45^\circ$, dar $\sphericalangle DCA = 45^\circ$ (AC este diagonală în pătrat), deci $\sphericalangle NCA = 90^\circ$, de unde dreptele AC și CN sunt perpendiculare.	1 p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.