

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 31 ianuarie 2025

Clasa a VIII-a

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL 1.

a) Determinați numerele raționale a și b știind că $\frac{a}{\sqrt{2}-1} + \frac{b}{\sqrt{2}+1} = 7 - \sqrt{18}$.

b) Determinați numerele reale a și b , cu $a \geq b$, pentru care $a^2 - b = \sqrt{a-b} - \frac{1}{2}$.

BAREM:

a) $(a+b)\sqrt{2} + (a-b) = -3\sqrt{2} + 7; a, b \in \mathbb{Q}$ 2p.

Prin identificare $\Rightarrow a = 2, b = -5$ 2p.

b) $(a - \frac{1}{2})^2 + (\sqrt{a-b} - \frac{1}{2})^2 = 0$ 2p.

$a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{4}$ 1p.

SUBIECTUL 2.

a) Demonstrați că expresia $E(x, y) = \frac{x^4 + y^4 + (x+y)^4}{(x^2 + xy + y^2)^2}$ este constantă, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^*$.

b) Să se arate că $\sqrt{x^4 + y^4 + (x+y)^4} + \sqrt{x^4 + y^4 + (x-y)^4} \geq 4\sqrt{2} \cdot |xy|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^*$

(GM 10/2024)

BAREM:

a) Calcul direct $E(x, y) = 2$ 3p

b) $E(x, -y) = 2$ 1p

Inegalitatea devine $\sqrt{2}(x^2 + y^2 + xy) + \sqrt{2}(x^2 + y^2 - xy) \geq 4\sqrt{2}|x y|$ 2p.

$(|x| - |y|)^2 \geq 0$ 1p.

SUBIECTUL 3.

Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ și punctele M, N, P, Q, T respectiv mijloacele segmentelor $AA', A'D', DD', AD, PQ$.

Demonstrați că dreapta CT este paralelă cu planul (MNB) .

BAREM:

$MN \square AD' \square PQ$ (linii mijlocii)2p

$BCPM$ dreptunghi $\Rightarrow MB \square PC$ 2p

$\Rightarrow (MNB) \square (CPQ)$ 1p

$CT \subset (CPQ) \Rightarrow CT \square (MNB)$ 2p

SUBIECTUL 4.

Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$, punctul M mijlocul segmentului BC , iar $\frac{AB}{VA} = \sqrt{3}$.

a) Demonstrați că $BC \perp AG$, unde G este centrul de greutate al triunghiului VBC .

b) Calculați măsura unghiului dintre dreptele VM și AC .

BAREM:

a) $BC \perp VM, BC \perp AM$ 2p

$BC \perp (VAM); AG \subset (VAM) \Rightarrow BC \perp AG$ 1p

b) Ducem $MN \square AC$ (linie mijlocie)

Atunci $\square (VM, AC) = \square (VM, MN) = \square VMN$ 1p

Triunghiul VMN este isoscel1p

$$VA = m \Rightarrow AB = m\sqrt{3}, MN = \frac{m\sqrt{3}}{2}, VM = VN = \frac{m}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Ducem } VT \perp MN \Rightarrow VT = \frac{m}{4} \Rightarrow m(\sphericalangle VMN) = 30^\circ \dots\dots\dots 1p$$