

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 8 februarie 2025
Clasa a IX - a

Barem de corectare și notare

1. Se consideră numărul real $a \in (0, +\infty)$ astfel încât $a^2 + \frac{1}{a^2} = 14$.
- a) Dați un exemplu de un număr real pozitiv a care verifică egalitatea din ipoteză.
- b) Calculați $a^5 + \frac{1}{a^5}$.

Soluție:

a) Notând $a^2 = b$, $b > 0$, egalitatea din ipoteză devine

$$b + \frac{1}{b} = 14, \text{ cu soluțiile } b_{1,2} = 7 \pm 4\sqrt{3}.$$

Putem alege $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$ (sau $a = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$)3p

b) Notând $a + \frac{1}{a} = x$, $x > 0$, prin ridicare la pătrat și folosind ipoteza, obținem

$$x^2 = 16 \stackrel{x>0}{\Rightarrow} x = 4, \text{ deci } a + \frac{1}{a} = 4 \text{2p}$$

$$\begin{aligned} a^5 + \frac{1}{a^5} &= \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a^4 - a^3 \cdot \frac{1}{a} + a^2 \cdot \frac{1}{a^2} - a \cdot \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4}\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left[\left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right) - \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + 1\right] = \\ &= \left(a + \frac{1}{a}\right) \left[\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - 1\right] = 724 \text{2p} \end{aligned}$$

2. a) Arătați că $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$. Precizați cazul în care se obține egalitate.

b) Fie $a, b, c \in (0, +\infty)$. Arătați că

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} - 2 \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}.$$

Soluție:

a) $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \geq 0, \forall x \in (0, +\infty)$

Cazul de egalitate se obține pentru $x = 1$ 2p

b) Utilizând inegalitatea dintre m_h și m_a , obținem $\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}$ 2p

Scriind și relațiile analoage, prin însumarea lor obținem $\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq a+b+c$.

Inegalitatea de demonstrat are loc dacă $a+b+c-2 \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$.

Aceasta este echivalentă cu $(a^3-3a+2)+(b^3-3b+2)+(c^3-3c+2) \geq 0$, inegalitate adevărată, pe baza subpunctului a).....2p

Cazul de egalitate se obține pentru $a=b=c=1$ 1p

3. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația

$$\left[\frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{6} \right] = x - 2.$$

(prin $[a]$ înțelegem partea întreagă a numărului real a)

(Supliment G.M. 10/2024)

Soluție:

Cum $\left[\frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{6} \right] \in \mathbb{Z}$, obținem $x-2 \in \mathbb{Z}$, deci $x \in \mathbb{Z}$ 1p

Ecuația dată este echivalentă cu $\left[\frac{x(x-1)(x-2)}{6} - \frac{1}{6} \right] = x-2$ 2p

Cum $x(x-1)(x-2):6, \forall x \in \mathbb{Z}$, rezultă că $\frac{x(x-1)(x-2)}{6} \in \mathbb{Z}$ 2p

Ecuația devine $\frac{x(x-1)(x-2)}{6} + \left[-\frac{1}{6} \right] = x-2 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)(x-2)}{6} = x-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-6)=0$. Cum $x \in \mathbb{Z}$, obținem $x=1$ 2p

4. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic cu ortocentrul H și centrul cercului circumscris O . Se notează cu X, Y, Z centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC , HAC , respectiv HAB .

a) Arătați că patrulaterul $BOCX$ este paralelogram;

b) Arătați că $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ}$.

Soluție:

a) $\triangle OBX \equiv \triangle OCX$ (L.L.L.) $\Rightarrow \angle OBX \equiv \angle OCX$ (1)

În cercul circumscris $\triangle ABC$, $\angle BOC = 2\angle BAC$,

$$\angle BAC = \frac{BC}{2} \text{ deci } \angle BOC = 2\angle BAC \text{ (2).}$$

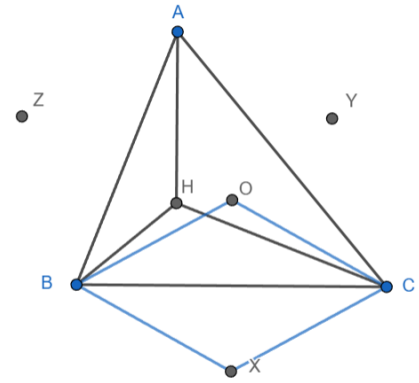
În cercul circumscris $\triangle HBC$,

$$\angle BXC = \angle BHC = 360^\circ - \angle BHC = 360^\circ - 2\angle BHC.$$

Dar $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$, deci

$$\angle BXC = 2\angle BAC \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \angle BOC \equiv \angle BXC \text{ (3)}$$

Din (1) și (3), obținem $BOCX$ este paralelogram3p



b) Din relația lui Sylvester, avem $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ 1p

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX}) + (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OY}) + (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OZ}) = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}) + \\ &+ (\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ}) = -\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ} \text{1p} \end{aligned}$$

Din a) avem că $BOCX$ este paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. În mod analog, avem

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \text{ și } \overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \text{1p}$$

$$\text{Atunci } \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = -\overrightarrow{OH} + 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -\overrightarrow{OH} + 2\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OH} \text{1p}$$