

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”**Etapă Locală****Maramureș – 8 februarie 2025****Clasa a X- a****Secțiunea H1****Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

1. a) Dacă $a = \sqrt{2x+3}$, $b = \sqrt[3]{4x-4}$ și $x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$, demonstrați că $2a^2 - b^3 = 10$.
b) Rezolvați în \mathbb{R} sistemul:
$$\begin{cases} 2a^2 - b^3 = 10 \\ a + b = 5 \end{cases}$$
2. Se consideră numărul complex $z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}$, iar $S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$, $n \in \mathbb{N}$.
a) Demonstrați că $z^2 + z + 1 = 0$.
b) Determinați S_5 , S_6 și S_7 .
3. a) Arătați că $\log_2 3 > \frac{3}{2}$.
b) Arătați că $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 = \log_2 6$.
c) Demonstrați inegalitatea $\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 5$.
4. a) Matei urcă în fiecare zi pe munte. În prima zi i-au fost necesare 7 ore urcând și coborând. A doua zi a petrecut 8 ore urcând și coborând. În fiecare zi urcă de două ori mai încet decât în ziua precedentă, dar coboară de două ori mai repede. Câte ore petrece pe munte în a treia zi?
b) Pe cele două maluri ale unui râu se află doi copaci înalți de 10 m, respectiv 15 m. Distanța dintre ei este de 25 m. În vârful fiecărui copac stă o pasăre. La un moment dat, pe suprafața râului, pe linia ce unește copacii apare un pește situat la distanțe egale față de cele două păsări. La ce distanță de copacul cel mai înalt a apărut peștele?

Notă:*Toate subiectele sunt obligatorii.**Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.**Timp de lucru – 3 ore*