

**Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”****Etapă Locală****Maramureș – 8 februarie 2025****Clasa a XII - a****Secțiunea H2****Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii**

1. Pe  $\mathbb{Z}$  definim legea de compoziție " $*$ " prin relația

$$x * y = xy - 3x - 3y + 12, \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

- a) Determinați elementele din  $\mathbb{Z}$ , simetrizabile în raport cu legea " $*$ ".  
b) Determinați  $x \in \mathbb{Z}$  pentru care  $x * x * \dots * x = x$ , unde  $x$  intră în compunere de 2025 ori.

2. Se consideră mulțimea  $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 4x \\ -x & 1-2x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$ .

- a) Arătați că  $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ .  
b) Demonstrați că  $G$  este grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor pătratice de ordinul doi.  
c) Determinați matricea  $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

3. Fie  $a > 0$  și funcțiile  $f, g, G: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , cu

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot (3 + \ln x) \cdot (5 + \ln x)}, \quad g(x) = \frac{1}{x \cdot (a + \ln x)},$$

$$G(x) = \ln(a + \ln x)$$

- a) Arătați că  $G$  este o primitivă a funcției  $g$  pe intervalul  $[1, \infty)$ .  
b) Determinați primitiva  $F$  a funcției  $f$  pe intervalul  $[1, \infty)$ , cu proprietatea

$$F(e^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{7}.$$

4. Fie  $a \in \mathbb{R}$  și funcția  $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{\pi(x-1)}{3}, & x \in [0, 1] \\ \frac{a}{x^2 - 4x + 7}, & x \in (1, 3] \end{cases}$ .

- a) Determinați valorile lui  $a$  pentru care  $f$  admite primitive.  
b) Pentru  $a = 4$ , calculați  $\int_0^3 f(x) dx$ .

**Notă:***Toate subiectele sunt obligatorii.**Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.**Timp de lucru – 3 ore*