



Olimpiada Națională de Matematică 2025

Etapă locală - Iași, 31 ianuarie 2025

Clasa a VIII –a

Barem de notare și evaluare

Problema 1.

Fie a, b, c, x numere reale cu $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$, astfel încât:

$$a^2 \cdot \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a} \right) = 2024, \quad b^2 \cdot \left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b} \right) = -2025$$

și

$$c^2 \cdot \left(\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} \right) = x.$$

Aflați valoarea lui x .

(adaptare – supliment GM10/2024)

Soluție:

<p>Calculează:</p> $a^2 \cdot \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a} \right) = 2024 \Leftrightarrow \frac{a^2(c-b)}{(a+b)(c+a)} = 2024$ $b^2 \cdot \left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b} \right) = -2025 \Leftrightarrow \frac{b^2(a-c)}{(b+c)(a+b)} = -2025$	2p
<p>Adună cele două relații de mai sus și obține:</p> $(a+b)(b+c)(c+a) = b^2c^2 - a^2c^2$	2p
<p>Împarte la $a+b \neq 0$ relația precedentă și obține:</p> $(b+c)(c+a) = c^2(b-a)$	1p
<p>Calculează:</p> $x = c^2 \left(\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} \right) = c^2 \cdot \frac{b+c-c-a}{(c+a)(b+c)} = \frac{c^2(b-a)}{(c+a)(b+c)} = 1$	2p

Problema 2.

a) Arătați că $\sqrt{a+k} \leq \frac{a+k+1}{2}$, pentru orice $a \in (0; \infty)$ și orice k număr natural nenul.

b) Arătați că

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} + \dots + \sqrt{a+2025} \leq \frac{2025(a+1014)}{2}, \text{ pentru orice } a \in (0; \infty).$$

Soluție:

<p>a) Aplicând, eventual, inegalitatea dintre media geometrică și media aritmetică pentru două numere pozitive, obține:</p> $\sqrt{a+k} = \sqrt{1 \cdot (a+k)} \leq \frac{1+(a+k)}{2} = \frac{a+k+1}{2}$	3p
<p>b) Aplică, eventual, inegalitatea de la punctul (a) pentru $k = \overline{1,2025}$ și obține, prin însumarea relațiilor:</p>	1p



$\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} + \dots + \sqrt{a+2025} \leq \frac{a+2}{2} + \frac{a+3}{2} + \dots + \frac{a+2026}{2}$	1p
<p>Calculează suma din membrul drept al inegalității și obține:</p> $\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} + \dots + \sqrt{a+2025} \leq \frac{2025a + \frac{2028 \cdot 2025}{2}}{2}$	1p
Finalizează și obține inegalitatea din enunț.	1p

Problema 3.

a) Numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_{2025}$ satisfac relația:

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = \dots = |x_{2024} - x_{2025}| = |x_{2025} - x_1|.$$

Arătați că $x_1 = x_2 = \dots = x_{2025}$.

b) Determinați numerele reale a și b , cu $a < b$, știind că în intervalul $(a; b)$ se află cel puțin 7 numere întregi și are loc relația: $4a^2 + 4b^2 + 3a - 59b + 220 = |a - b + 6|$.

Soluție:

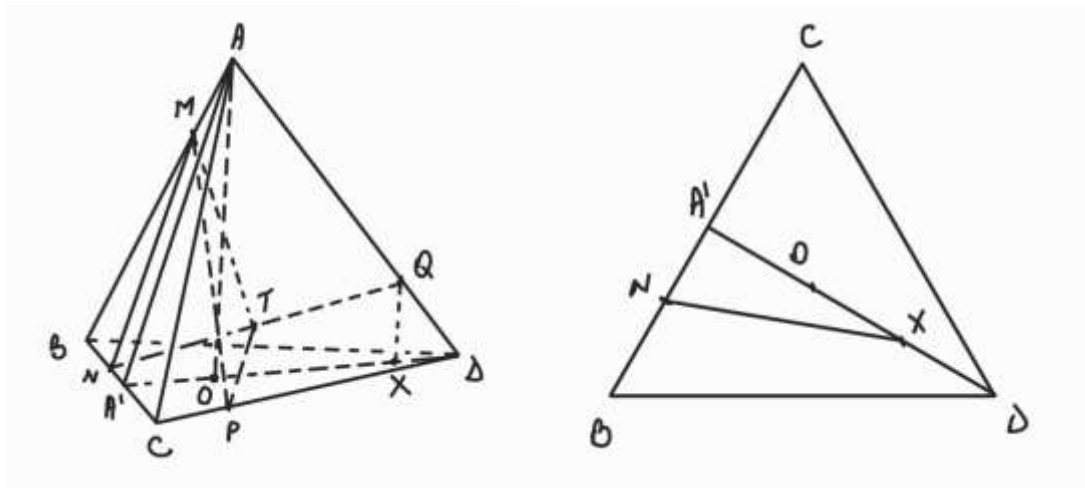
<p>a) Notăm</p> $ x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \dots = x_{2024} - x_{2025} = x_{2025} - x_1 = a \geq 0$	1p
<p>Deci,</p> $x_1 - x_2 = \pm a, x_2 - x_3 = \pm a, \dots, x_{2025} - x_1 = \pm a.$	1p
<p>Dintre cele 2025 de diferențe, presupunem că n au valoarea $+a$, iar celelalte $2025 - n$ au valoarea $-a$. Atunci,</p> $0 = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \dots + (x_{2025} - x_1) = n \cdot a + (2025 - n) \cdot (-a) = (2n - 2025) \cdot a$	1p
<p>Cum $2n - 2025$ este număr impar, rezultă că $a = 0$.</p> <p>Deci, $x_1 = x_2 = \dots = x_{2025}$.</p>	1p
<p>b) Având în vedere că în intervalul $(a; b)$ se află cel puțin 7 numere întregi, obținem $b - a \geq 6 \Leftrightarrow a - b + 6 \leq 0$.</p> <p>Deci,</p> $ a - b + 6 = b - a - 6.$	1p
<p>Ecuția dată devine:</p> $4a^2 + 4b^2 + 4a - 60b + 226 = 0 \Leftrightarrow (2a + 1)^2 + (2b - 15)^2 = 0$	1p
<p>Demonstrează că $a = -\frac{1}{2}$ și $b = \frac{15}{2}$.</p>	1p

Problema 4.

Fie tetraedrul regulat $ABCD$ cu latura de $6\sqrt{3}\text{cm}$ și punctele M, N, P, Q pe laturile AB, BC, CD și, respectiv, DA , astfel încât $AM = BN = CP = DQ = 2\sqrt{3}\text{cm}$.

- Arătați că $MN \parallel (AA'D)$, unde A' este mijlocul laturii BC .
- Arătați că $MN = MQ = QP = PN$.
- Calculați distanța de la punctul Q la planul (MTP) , unde T este mijlocul segmentului NQ .

Soluție:



<p>a) Avem</p> $\frac{BN}{BA'} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$ $\frac{AM}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{2}{3}$	1p
<p>Deci,</p> $\frac{BN}{BA'} = \frac{BM}{BA} \xrightarrow{R.Th.} MN \parallel AA'.$ <p>Cum $AA' \subset (AA'D)$, rezultă că $MN \parallel (AA'D)$.</p>	1p
<p>b) $\triangle NBM \equiv \triangle MAQ \Rightarrow MN = MQ$. Demonstrează că $MQ = QP$ și $QP = NP$</p>	1p 1p
<p>c) Ambele triunghiuri MNQ și NPQ sunt isoscele. MT este mediană în $\triangle NMQ \Rightarrow MT \perp NQ$. Analog, $PT \perp NQ$. Rezultă că $NQ \perp (MTP)$. Deci, $d(Q, (MTP)) = QT = \frac{NQ}{2}$.</p>	1p
<p>Fie $QX \perp (BCD), X \in (OD)$, unde O este centrul feței (BCD).</p>	



$\frac{QX}{AO} = \frac{XD}{OD} = \frac{QD}{DA} = \frac{1}{3}.$ $DA' = \frac{6\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 9cm, \text{ iar } AO = 6\sqrt{2}cm, \text{ de unde } QX = 2\sqrt{2}cm.$ $OD = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6cm, \text{ iar } XD = \frac{1}{3} \cdot OD = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2cm.$ $XA' = A'D - XD = 9 - 2 = 7cm.$ <p>Triunghiul $NA'X$ este dreptunghic. Deci, conform Teoremei lui Pitagora,</p> $NX^2 = NA'^2 + XA'^2.$ $NA' = BA' - BN = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}.$ $NX^2 = (\sqrt{3})^2 + 49 = 52 \Rightarrow NX = 2\sqrt{13}cm.$ <p>Deci,</p> $NQ^2 = QX^2 + XN^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{13})^2 = 4 \cdot 15 \Rightarrow NQ = 2\sqrt{15}cm.$ <p>În final,</p> $d(Q, (MTP)) = \sqrt{15}cm.$	2p
--	----