



Olimpiada Națională de Matematică 2025

Etapa locală - Iași, 31 ianuarie 2025

Clasa a XII-a

Problema 1.

Se consideră mulțimea $A = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}\}$.

Arătați că (A, \circ) este un monoid, unde „ \circ ” este operația de compunere a funcțiilor.

Gazeta Matematică 10/2024 (Supliment)

Problema 2.

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$. Demonstrați că $2 \leq \int_{-1}^1 f(x) dx \leq 3$.

Problema 3.

Determinați funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ știind că admite primitive, $f(x) + F(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$, pentru o anume primitivă F a funcției f , iar $f(0) = 0$.

Problema 4.

Fie (G, \cdot) un grup finit cu elementul neutru e . Arătați că mulțimea $H = \{x \in G \mid x^{2025} = e\}$ are un număr impar de elemente.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte