



Olimpiada Națională de Matematică 2025

Etapă locală - Iași, 31 ianuarie 2025

Clasa a VII-a

Barem de notare și evaluare

Problema 1.

a) Arătați că dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{2001 - \sqrt{2001 - n}}$ nu este rațional.

b) Determinați $n \in \mathbb{N}$, astfel încât numărul $\sqrt{2001 + \sqrt{2001 - n}}$ să fie rațional.

Soluție:

a) Dacă $\sqrt{2001 - \sqrt{2001 - n}} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{2001 - n} \in \mathbb{Q}$, deci $\sqrt{2001 - n} \in \mathbb{N}$ și $2001 - \sqrt{2001 - n}$ este număr natural pătrat perfect1p

$0 \leq 2001 - n < 2025$, deci $0 \leq \sqrt{2001 - n} < 45$ și $1956 < 2001 - \sqrt{2001 - n} \leq 2001$1p

Între 1956 și 2001 nu există pătrate perfecte pentru că $44^2 = 1936$ și $45^2 = 2025$1p

$2001 - \sqrt{2001 - n}$ nu poate fi pătrat perfect, deci $\sqrt{2001 - \sqrt{2001 - n}}$ nu este rațional.....1p

b) Dacă $\sqrt{2001 + \sqrt{2001 - n}} \in \mathbb{Q}$, atunci $2001 + \sqrt{2001 - n}$ trebuie să fie număr natural pătrat perfect.....1p

Dar $2001 \leq 2001 + \sqrt{2001 - n} < 2046$1p

Singurul pătrat perfect cuprins între 2001 și 2046 este 2025 deci $n = 1425$1p

Problema 2.

a) Fie $a > b > c > 0$, numere reale astfel încât $a \cdot b \cdot c = 1$ și $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Arătați că $a > 1 > b$.

b) Aflați $x \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x}}}$ să fie număr întreg.

Soluție:

a) Dacă $a \leq 1$, atunci din $c < b < a \leq 1$, avem $a \leq \frac{1}{a}$, $b < \frac{1}{b}$ și $c < \frac{1}{c}$, rezultă $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ contradicție cu ipoteza.....1p

Deci $a > 1$.

Dacă $b \geq 1$, atunci $a > b \geq 1$. Folosim inegalitatea mediilor pentru a și $\frac{1}{a}$ obținem $a + \frac{1}{a} \geq 2$ iar pentru b și $\frac{1}{b}$, $b + \frac{1}{b} \geq 2$. De aici avem $a - 1 \geq 1 - \frac{1}{a}$ și $b - 1 \geq 1 - \frac{1}{b}$1p

Prin înmulțire avem $(a - 1)(b - 1) \geq (1 - \frac{1}{a})(1 - \frac{1}{b})$, echivalent cu $ab - a - b + 1 \geq 1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}$1p

Din $abc = 1$, obținem $c = \frac{1}{ab}$ și înlocuind în relația precedentă obținem $a + b + c \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, contradicție cu ipoteza, deci $b < 1$1p

b) Dacă $\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x}}}$ este număr întreg, atunci $\sqrt{x - \sqrt{x}}$ este număr întreg și \sqrt{x} este număr întreg.....1p

Deci $x = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, iar $x - \sqrt{x} = n^2 - n = n(n - 1)$ care trebuie să fie pătrat perfect.....1p



Dacă $n \geq 2$, din $(n-1)^2 < n(n-1) < n^2$, avem că $n(n-1)$ nu este pătrat perfect deci nu avem soluții mai mari sau egale cu 2. Soluțiile sunt $n=0, x=0$ și $n=1, x=1$ 1p

Problema 3.

În triunghiul dreptunghic ABC cu $\angle A = 90^\circ$ și $\angle B = 60^\circ$, bisectoarea unghiului B intersectează mediana AM în H și cateta AC în P . Dacă N este centrul de greutate al triunghiului ABM , Q este simetricul punctului N față de BC și R este simetricul punctului B față de MQ , arătați că:

- Patrulaterul $PMQB$ este trapez isoscel;
- Punctele A, N, Q, R sunt patru puncte coliniare.

Soluție:

- AM este mediană în triunghiul ABC dreptunghic, $AM = \frac{BC}{2} = BM = CM$, $\angle B = 60^\circ$, deci triunghiul ABM este echilateral.1p
Fie D mijlocul lui BM , N centrul de greutate al triunghiului echilateral ABM și Q simetricul lui N față de BC , rezultă $MNBQ$ romb, deci $MQ \parallel BN$, $MQ \neq BP$, $BPMQ$ trapez.....1p
 $\angle PBC = \angle PCB = 30^\circ$, deci triunghiul PBC isoscel în care PM este mediană și înălțime, $PM \perp BC$, $NQ \perp BC$, $PM \parallel NQ$, $PN \parallel MQ$, $MPNQ$ paralelogram, $PM = NQ$1p
Triunghiul BNQ echilateral, $BQ = NQ = PM$, deci $PMQB$ trapez isoscel.....1p
- MQ mediatoarea segmentului BR , $MR = MB$, $\angle MRQ = \angle QMB = 30^\circ$, $\angle RMB = 60^\circ$ și triunghiul RMB este echilateral.....1p
 RD este mediană și înălțime în triunghiul echilateral MRB , $RD \perp BM$1p
Din $AD \perp BC$, $NQ \perp BC$ în D și $RD \perp BC$, rezultă că A, N, Q și R sunt coliniare.....1p

Problema 4.

În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiește pătratul $BEFG$ astfel încât punctul G să fie interior laturii BC . Cercul circumscris pătratului $ABCD$ se intersectează cu cercul circumscris pătratului $BEFG$ în punctele B și B' . Arătați că punctele A, G și B' sunt coliniare.

Marius Farcaș

Soluție:

- Fie C_1 cercul circumscris pătratului $ABCD$ și C_2 cercul circumscris pătratului $BEFG$. Arcul mare BC din cercul C_1 are 270° deci unghiul înscris $\angle BB'C$ are 135°1p
Arcul mic BE din cercul C_2 are 90° deci unghiul înscris $\angle BB'E$ are măsura de 45°1p
 $\angle CB'E = \angle CB'B + \angle BB'E = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ deci punctele C, B' și E sunt coliniare.....1p
 $\angle AB'C = 90^\circ$, $AB' \perp B'C$1p
 $\angle GB'E = 90^\circ$, $GB' \perp B'E$1p
Dreptele $B'C$ și $B'E$ coincid deci și dreptele $B'A$ și $B'G$ coincid și punctele A, G și B' sunt coliniare.....2p