

A 75-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 15 februarie 2025
Clasa a IX-a

Problema 1. Demonstrați că

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n},$$

pentru oricare $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Problema 2. Fie a, b, c numere reale strict pozitive .

a) Demonstrați că

$$\begin{aligned}a^2b^2 + b^2c^2 &\geq 2ab^2c \\a^2b^2 + a^2c^2 &\geq 2a^2bc \\a^2c^2 + b^2c^2 &\geq 2abc^2.\end{aligned}$$

b) Dacă a, b, c au proprietatea că $a + b + c = 1$ și $ab + bc + ca = \sqrt{3abc}$, determinați numerele.

Problema 3.

a) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

$$|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2024| = 2025(x - 2025).$$

b) Dacă x este soluția ecuației

$$|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - n| = (n + 1)(x - n - 1),$$

atunci demonstrați, că $x \geq \frac{5n+1}{2}$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 4. Fie vectorii \vec{AB} și \vec{CD} cu $\vec{AB} = k \cdot \vec{CD}$, $k > 1$, $k \in \mathbb{R}$, cu A, B, C, D puncte necoliniare, iar M mijlocul lui $[AD]$, N mijlocul lui $[CB]$ și P mijlocul lui $[AB]$.

a) Arătați că $\vec{MN} = \frac{k-1}{2} \cdot \vec{CD}$;

b) Determinați vectorii \vec{AQ} în funcție de vectorii \vec{AB} și \vec{AC} astfel încât punctele M, N, P și Q să fie vârfurile unui paralelogram (nu neapărat în această ordine)!

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!

Timp de lucru 3 ore.

Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.