Olimpiada Națională de Matematică 2025

Etapa locală 12.02.2025 Giurgiu

BAREM clasa VII a

1.

a) Efectuarea calculelor pentru determinarea lui $a = 0$ 2p

b) $b = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot 4}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \in A$; 3p

c) $\sqrt{n + \frac{1}{b}} = \sqrt{n+2}, n \in \boldsymbol{N}^*$ deci cel mai mic număr natural nenul n cu proprietatea cerută este $n = 2$. 2p

2.

BD bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$, deci $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD = x \Rightarrow \sphericalangle ABC = 2\,x$.

Δ BEC isoscel $\Rightarrow \sphericalangle EBC = \sphericalangle ECB = x$

Δ CDE isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DCE = \sphericalangle CED = y$

Deci $\sphericalangle ACB = x + y$ 2p

$3x + y = 90^o$ 1p

$\sphericalangle CED$ unghi exterior pentru Δ BEC $\Rightarrow \sphericalangle CED = \sphericalangle EBC + \sphericalangle ECB = 2x = y$.....1p

$x = 18^o$ și $y = 36^o$ 2p

$\sphericalangle ABC = 36^o$ și $\sphericalangle ACB = 54^o$ 1p

3. Desen corespunzător datelor din problema.....1p

a) PN linie mijlocie in $\Delta\, DCQ \rightarrow PN \| DC, PN = \frac{DC}{2}$

AM=$\frac{AB}{2} = \frac{CD}{2}$, AM∥CD 2p

b) De unde rezultă că AM ∥ NP, AM=NP, deci AMNP este paralelogram.....1p

c) Din AMNP paralelogram știm că diagonalele se injumătățesc→AQ=QN.....1p
Dar N mijlocul lui CQ→QN=NC.....1p

De unde AQ=QN=NC, adică AQ= $\frac{1}{3}\ AC$.....1p

4. Din a < b rezultă b - a > 0

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ - $\frac{1}{ab}\geq 0$, rezultă $\frac{b-a-1}{ab}\geq 0$, deci b-a ≥ 1, 1>0, relația este adevărată.....2p

Primele 10 numere prime sunt : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 13, 29.....1p

Conform a) , putem să scriem că

$\frac{1}{p_1p_2}+\frac{1}{p_2p_3}+\frac{1}{p_3p_4}+.....+\frac{1}{p_9p_{10}}\leq\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3}+.....\frac{1}{p_9}-\frac{1}{p_{10}}=\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_{10}}$.....2p

$\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_{10}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{29}=\frac{27}{58}<\frac{28}{58}=\frac{14}{29}$ 2p