

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 6 februarie 2026

Soluții

Clasa a V-a

1. Se consideră numerele naturale $a = 2^{2027}$, $b = 3^{2026}$ și $c = 4^{2025}$.

(a) Ordonati descrescător numerele a , b și c .

(b) Arătați că $a + 2b + 3c$ nu este pătratul niciunui număr natural.

Ramona Drăgan

Soluție.

(a) $a = 2^6 \cdot 2^{2021} = 64 \cdot 2^{2021}, \dots\dots\dots 1p$

$b = 3^5 \cdot 3^{2021} = 243 \cdot 3^{2021}, \dots\dots\dots 1p$

$c = 4^4 \cdot 4^{2021} = 256 \cdot 4^{2021} \dots\dots\dots 1p$

Cum $64 < 243 < 256$ și $2 < 3 < 4$, rezultă $c > b > a$. $\dots\dots\dots 1p$

(b) Ultima cifră a lui a este 8 $\dots\dots\dots 1p$

Ultima cifră a lui b este 9, deci ultima cifră a lui $2b$ este 8 $\dots\dots\dots 1p$

Ultima cifră a lui c este 4, deci ultima cifră a lui $3c$ este 2 $\dots\dots\dots 1p$

Rezultă că ultima cifră a numărului $a + 2b + 3c$ este 8. Atunci numărul $a + 2b + 3c$ nu este pătrat perfect. $\dots\dots\dots 2p$

2. Câtuł împărțirii numărului 2024 la $\overline{ab}$ este $\overline{abb}$. Aflați restul acestei împărțiri.

Gazeta Matematică

Soluție.

$2024 = \overline{ab} \cdot \overline{abb} + r$, unde $r \in \mathbb{N}$, $r < \overline{ab}$ este restul împărțirii considerate $\dots\dots\dots 2p$

Avem $2024 = \overline{ab} \cdot (10 \cdot \overline{ab} + b) + r \geq 10(\overline{ab})^2$, de unde obținem $\overline{ab} \leq 14 \dots\dots\dots 3p$

Pentru $\overline{ab} = 14$, avem $2024 - \overline{ab} \cdot \overline{abb} = 2024 - 14 \cdot 144 = 8 < 14$. Deducem $r = 8 \dots\dots\dots 2p$

Dacă $\overline{ab} \leq 13$, atunci $\overline{ab} \cdot \overline{abb} \leq 13 \cdot 133 = 1729$, de unde $2024 - \overline{ab} \cdot \overline{abb} \geq 295 > \overline{ab}$.

În acest caz, câtuł împărțirii numărului 2024 la $\overline{ab}$ este mai mare decât $\overline{abb}$. $\dots\dots\dots 1p$

În concluzie, $\overline{ab} = 14$ și restul împărțirii considerate este 8. $\dots\dots\dots 1p$

3. Ana depune cei 480 de lei pe care i-a primit cadou în 3 conturi la bancă. Apoi extrage din primul cont suma depusă în al doilea și o depune în al doilea cont. După aceea, extrage din al doilea cont suma depusă în al treilea cont și o adaugă în al treilea cont. În final, extrage din al treilea cont suma aflată în primul cont și o adaugă în primul cont. Câți lei erau la început în fiecare cont știind că după modificările făcute conturile Anei conțin aceeași sumă de bani?

Adriana Cațaron

Soluție.

Notăm cu a , b și c sumele de bani depuse de Ana în conturile 1, 2 și respectiv 3.

După prima modificare conturile conțin sumele: $a - b$, $2b$ și c **2p**

După a doua modificare cele 3 conturi conțin sumele $a - b$, $2b - c$ și $2c$ **2p**

După ultima modificare în conturi se află sumele egale $2(a - b)$, $2b - c$ și $2c - (a - b)$
.....**2p**

Fiecare cont conține în final suma $480 : 3 = 160$ (lei)**1p**

Din $2(a - b) = 160$ rezultă $a - b = 80$. Cum $2c - (a - b) = 160$, obținem $c = 120$ (lei) ...**1p**

Din relațiile $2b - c = 160$ și $a - b = 80$ rezultă $b = 140$ (lei) și $a = 220$ (lei).**1p**

4. Pe o tablă sunt scrise 2026 numere naturale. Alegem la întâmplare două numere dintre cele aflate pe tablă, le ștergem și adăugăm pe tablă suma sau diferența dintre aceste două numere. Repetăm procedeul până când pe tablă rămâne un singur număr. Demonstrați că, dacă ultimul număr rămas pe tablă este impar, atunci printre cele 2026 numere aflate inițial pe tablă cel puțin un număr este par.

Romeo Ilie

Soluția 1.

Presupunem, prin absurd, că cele 2026 numere înscrise pe tablă sunt impare.....**1p**

Atunci suma acestor numere este un număr par**2p**

După fiecare operație, suma numerelor înscrise pe tablă are aceeași paritate cu suma precedentă**4p**

Deducem că ultimul număr rămas pe tablă este par. Contradicție. Atunci printre cele 2026 numere aflate inițial pe tablă, cel puțin un număr este par**2p**

Soluția 2.

Presupunem, prin absurd, că cele 2026 numere înscrise pe tablă sunt impare.....**1p**

Suma sau diferența dintre două numere impare sau două numere pare este un număr par**1p**

Suma sau diferența dintre un număr par și unul impar este un număr par**1p**

La fiecare operație asupra șirului de numere rămase pe tablă, paritatea numărului numerelor impare rămâne aceeași**3p**

Cum am presupus că inițial erau 2026 numere impare, rezultă că ultimele două numere rămase pe tablă sunt sau ambele impare sau ambele pare, deci ultimul număr obținut pe tablă va fi par. Contradicție. Atunci printre cele 2026 numere aflate inițial pe tablă, cel puțin un număr este par**3p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 6 februarie 2026

Soluții

Clasa a VI-a

1. Fie A mulțimea formată din toate numerele naturale de trei cifre care conțin cifra 5 și B mulțimea formată din toate numerele naturale impare de trei cifre. Determinați numărul de elemente ale mulțimilor A , B , $A \cap B$ și $A \cup B$.

Marinela Canu

Soluție.

Există 900 de numere de trei cifre. Dintre acestea, $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ numere nu conțin cifra

5. Rezultă că mulțimea A are $900 - 648 = 252$ elemente**3p**

Mulțimea B are $900 : 2 = 450$ elemente**2p**

$A \cap B$ conține numerele impare de trei cifre care conțin cifra 5.

Există $8 \cdot 9 = 72$ numere impare $\overline{abc}$ cu $a \neq 5, b \neq 5, c = 5$.

Există $5 \cdot 8 = 40$ numere impare $\overline{abc}$ cu $a \neq 5, b = 5$.

Există $5 \cdot 10 = 50$ numere impare $\overline{abc}$ cu $a = 5$

Rezultă că mulțimea $A \cap B$ are $72 + 40 + 50 = 162$ elemente.**2p**

$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) = 252 + 450 - 162 = 540$ **2p**

2. Fie a, b, c, d, e, f astfel încât

$$\frac{2024}{a+2} + \frac{2024}{b+3} + \frac{2024}{c+4} + \frac{2024}{d+5} + \frac{2024}{e+6} + \frac{2024}{f+7} = 2023.$$

Calculați suma

$$\frac{a+1}{a+2} + \frac{b+2}{b+3} + \frac{c+3}{c+4} + \frac{d+4}{d+5} + \frac{e+5}{e+6} + \frac{f+6}{f+7}.$$

Gazeta Matematică, Supliment cu Exerciții

Soluție.

Notăm cu S suma cerută.

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+4} + \frac{1}{d+5} + \frac{1}{e+6} + \frac{1}{f+7} = \frac{2023}{2024} \dots\dots\dots\mathbf{2p}$$

$$S = \frac{a+2-1}{a+2} + \frac{b+3-1}{b+3} + \frac{c+4-1}{c+4} + \frac{d+5-1}{d+5} + \frac{e+6-1}{e+6} + \frac{f+7-1}{f+7} \dots\dots\dots\mathbf{3p}$$

$$S = 1 - \frac{1}{a+2} + 1 - \frac{1}{b+3} + 1 - \frac{1}{c+4} + 1 - \frac{1}{d+5} + 1 - \frac{1}{e+6} + 1 - \frac{1}{f+7} \dots\dots\dots\mathbf{2p}$$

$$S = 6 - \frac{2023}{2024} = \frac{10121}{2024} \dots\dots\dots\mathbf{2p}$$

3. Fie unghiurile adiacente suplementare $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$, $[OD]$ bisectoarea $\widehat{BOC}$ și $[OE]$ semidreapta opusă semidreptei $[OB]$. Paralela prin E la dreapta AC intersectează perpendiculara în O pe AC în F și perpendiculara în O pe BE în G . Unghiul $\widehat{OEF}$ are măsura de 50° .

- (a) Calculați măsura unghiului $\widehat{DOC}$.
 (b) Demonstrați că $\widehat{AOG} \equiv \widehat{EOF}$.
 (c) Arătați că bisectoarele unghiurilor $\widehat{BOC}$ și $\widehat{GOF}$ sunt semidrepte opuse.

Soluție.

- (a) $AC \parallel EF \Rightarrow m(\widehat{COE}) = m(\widehat{OEF}) = 50^\circ$ (unghiuri alterne - interne)1p
 $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COE}) = 50^\circ$ (unghiuri opuse la vârf)1p
 Cum $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ adiacente suplementare, avem $m(\widehat{BOC}) = 130^\circ$
 $[OD]$ bisectoarea unghiului $\widehat{BOC} \Rightarrow m(\widehat{DOC}) = 65^\circ$ 1p
 (b) $OF \perp AC \Rightarrow m(\widehat{FOE}) + m(\widehat{COE}) = 90^\circ$, $OG \perp BE \Rightarrow m(\widehat{AOG}) + m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$,
 $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COE}) \Rightarrow \widehat{FOE} \equiv \widehat{AOG}$ 3p
 (c) $m(\widehat{AOG}) = 90^\circ - m(\widehat{AOB}) = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$
 $m(\widehat{GOF}) = 90^\circ - m(\widehat{AOG}) = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ 1p
 $[OM]$ bisectoarea unghiului $\widehat{GOF} \Rightarrow m(\widehat{GOM}) = m(\widehat{FOM}) = 25^\circ$ 1p
 $m(\widehat{DOC}) + m(\widehat{COF}) + m(\widehat{FOM}) = 65^\circ + 90^\circ + 25^\circ = 180^\circ$.
 Rezultă că $[OD]$ și $[OM]$ sunt semidrepte opuse.1p

4. Punctele A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sunt situate, în această ordine, pe un cerc de centru O , astfel încât măsurile arcelor $\widehat{A_1A_2}, \widehat{A_2A_3}, \widehat{A_3A_4}$ sunt direct proporționale cu 15, 6, respectiv 9 și măsurile arcelor $\widehat{A_3A_4}, \widehat{A_4A_5}, \widehat{A_5A_1}$ invers proporționale cu $\frac{1}{3}$; 0,25, respectiv 0,1(6). Punctul M este mijlocul arcului $\widehat{A_4A_5}$, iar punctul N este diametral opus punctului A_3 .

- (a) Determinați măsurile arcelor $\widehat{A_1A_2}, \widehat{A_2A_3}, \widehat{A_3A_4}, \widehat{A_4A_5}$ și $\widehat{A_5A_1}$.
 (b) Demonstrați că OM este mediatoarea segmentului A_3N .
 (c) Arătați că $[ON]$ este bisectoarea $\widehat{A_1OA_5}$.

Mihaela Sîntea

Soluție.

- (a) Conform ipotezei, $\frac{\widehat{A_1A_2}}{15} = \frac{\widehat{A_2A_3}}{6} = \frac{\widehat{A_3A_4}}{9}$, sau $\frac{\widehat{A_1A_2}}{5} = \frac{\widehat{A_2A_3}}{2} = \frac{\widehat{A_3A_4}}{3}$ 1p
 Apoi $\frac{\widehat{A_3A_4}}{3} = \frac{\widehat{A_4A_5}}{4} = \frac{\widehat{A_5A_1}}{6}$ 1p
 Rezultă $\frac{\widehat{A_1A_2}}{5} = \frac{\widehat{A_2A_3}}{2} = \frac{\widehat{A_3A_4}}{3} = \frac{\widehat{A_4A_5}}{4} = \frac{\widehat{A_5A_1}}{6} = \frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$ 1p
 Obținem $\widehat{A_1A_2} = 90^\circ$, $\widehat{A_2A_3} = 36^\circ$, $\widehat{A_3A_4} = 54^\circ$, $\widehat{A_4A_5} = 72^\circ$, $\widehat{A_5A_1} = 108^\circ$ 1p

- (b) M mijlocul $\widehat{A_4A_5} \Rightarrow \widehat{A_5M} = \widehat{A_4M} = 36^\circ \dots\dots\dots 1p$
 $\widehat{A_3M} = \widehat{A_3A_4} + \widehat{A_4M} = 54^\circ + 36^\circ = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A_3OM} = 90^\circ \Rightarrow OM \perp A_3O \dots\dots\dots 1p$
 N, A_3 diametral opuse $\Rightarrow A_3, O, N$ coliniare și $A_3O \equiv NO$ (raze)
Rezultă că OM este mediatoarea segmentului $(A_3N) \dots\dots\dots 1p$
- (c) Punctele A_1, O și A_4 sunt coliniare și punctele N, O și A_3 sunt coliniare,
de unde rezultă $m(\widehat{A_1ON}) = m(\widehat{A_3OA_4}) = m(\widehat{A_3A_4}) = 54^\circ$.
Din $m(\widehat{A_1OA_5}) = m(\widehat{A_1A_5}) = 108^\circ$, deducem că $[ON]$ este bisectoarea lui $\widehat{A_1OA_5}$.
.....2p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 6 februarie 2026

Soluții

Clasa a VII-a

1. (a) Determinați numărul termenilor de sub radical pentru care relația de mai jos este adevărată:

$$\sqrt{2026^2 + 2026^2 + \dots + 2026^2} = \underbrace{2026^2 + 2026^2 + \dots + 2026^2}_{2026 \text{ termeni}}.$$

- (b) Demonstrați că:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{12}} + \frac{9}{\sqrt{20}} + \frac{11}{\sqrt{30}} + \frac{13}{\sqrt{42}} + \frac{15}{\sqrt{56}} + \frac{17}{\sqrt{72}} > 2^4.$$

Doina Păun

Soluție.

- (a) Fie n numărul termenilor de sub radical.

Avem $\sqrt{n \cdot 2026^2} = 2026^2 \cdot 2026 \dots\dots\dots 2p$

Rezultă $\sqrt{n} \cdot 2026 = 2026^2 \cdot 2026$, de unde obținem $n = 2026^4 \dots\dots\dots 2p$

- (b) Conform inegalității mediilor, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$, $\forall a, b > 0$.

Rezultă $\frac{a+b}{\sqrt{a \cdot b}} \geq 2$, $\forall a, b > 0$. Inegalitatea este strictă pentru $a \neq b$. $\dots\dots\dots 2p$

Notăm cu S suma din membrul stâng al inegalității de demonstrat.

Avem $S = \sum_{k=1}^8 \frac{k + (k+1)}{\sqrt{k(k+1)}} > 8 \cdot 2 = 2^4 \dots\dots\dots 3p$

2. Fie a, b, c numere reale, nenule. Demonstrați că dacă $a \cdot b - 1 = b \cdot c = a \cdot c + 1 \in \mathbb{N}$, atunci $a \cdot b \cdot c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Romeo Ilie

Soluție. Fie $k = a \cdot b - 1 = b \cdot c = a \cdot c + 1$, unde $k \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$

$a \cdot b = k + 1$, $a \cdot c = k - 1$ și $b \cdot c = k$. Cum a, b, c sunt nenule, avem $k \geq 2 \dots\dots\dots 1p$

$(a \cdot b \cdot c)^2 = k \cdot (k^2 - 1) \dots\dots\dots 1p$

Presupunem, prin absurd, că $a \cdot b \cdot c \in \mathbb{Q} \dots\dots\dots 1p$

Atunci, $k \cdot (k^2 - 1)$ este pătrat perfect $\dots\dots\dots 1p$

$(k, k^2 - 1) = 1 \implies k$ și $k^2 - 1$ sunt pătrate perfecte $\dots\dots\dots 2p$

Dar $k \geq 2$ implică $(k - 1)^2 < k^2 - 1 < k^2$, deci $k^2 - 1$ nu poate fi pătrat perfect.

Contradicție. Deci $a \cdot b \cdot c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \dots\dots\dots 2p$

3. În patrulaterul convex $ABCD$, $\widehat{DAC} = 60^\circ$, punctul E este mijlocul segmentului AB , punctul O este mijlocul segmentului AC , iar punctele M și N aparțin segmentului AC , astfel încât $AM = NC = \frac{AC}{4}$. Presupunem $\triangle EMN \equiv \triangle NCB$ și $DM \perp AC$.
- (a) Arătați că $ABCD$ este dreptunghi.
- (b) Fie $BO \cap EN = \{P\}$. Calculați raportul dintre aria triunghiului OPN și aria patrulaterului $ABCD$.

Lucica Ghișe

Soluție.

- (a) Avem $AM = OM = ON = NC = \frac{AC}{4}$.
 $\triangle EMN \equiv \triangle NCB \implies EM \equiv NC$. Astfel, $ME \equiv AM \equiv MO$. Rezultă $\widehat{OEA} = 90^\circ$
 OE linie mijlocie în $\triangle ABC \implies OE \parallel BC$. Cum $OE \perp AB$, obținem $BC \perp AB$... **2p**
 ME linie mijlocie în $\triangle ABO \implies ME \parallel OB \implies \widehat{CME} \equiv \widehat{COB}$.
 $\triangle EMN \equiv \triangle NCB \implies \widehat{EMN} \equiv \widehat{NCB}$. Obținem $\widehat{COB} \equiv \widehat{OCB}$, deci $\triangle OBC$ este isoscel. Rezultă $BO \equiv BC$ (1).
 $\triangle ABC$ dreptunghic, BO mediană, implică $BO \equiv OC \equiv OA$ (2).
Din (1) și (2), deducem că triunghiul OBC este echilateral.
Atunci $\widehat{OCB} = 60^\circ$, de unde rezultă $\widehat{CAB} = 30^\circ$.
Avem $\widehat{DAE} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, deci $DA \perp AB$ și $DA \parallel BC$ **2p**
 $\triangle OBC$ echilateral, cu BN mediană, implică $BN \perp OC$.
 $\triangle DMA \equiv \triangle BNC$ (C.U.) $\implies DA \equiv BC$.
Rezultă că $ABCD$ este dreptunghi (paralelogram, cu un unghi drept). **1p**
- (b) Din OP linie mijlocie în $\triangle EMN$ rezultă $\mathcal{A}_{\triangle OPN} = \frac{1}{4} \mathcal{A}_{\triangle EMN}$
Apoi $\mathcal{A}_{\triangle EMN} = \mathcal{A}_{\triangle NCB} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{\triangle BOC} = \frac{1}{8} \mathcal{A}_{ABCD}$.
Rezultă $\frac{\mathcal{A}_{\triangle OPN}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \frac{1}{32}$ **4p**
4. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC și $AD \perp BC$, $D \in BC$. În exteriorul triunghiului ABC construim pătratul $BCEF$. Știind că (AE) este bisectoarea unghiului DAC , calculați:
- (a) măsura unghiului $\widehat{BAE}$;
- (b) dacă $AD \equiv DC$ și $AD \cap BE = \{M\}$, determinați natura patrulaterului $ACEM$.

Gazeta Matematică, enunț modificat

Soluție.

- (a) (AE bisectoarea unghiului $\widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{DAE} \equiv \widehat{CAE} = a^\circ$ 1p
 $AD \parallel CE$, AE secantă $\Rightarrow \widehat{CAE} \equiv \widehat{CEA} \Rightarrow \triangle ACE$ isoscel $\Rightarrow AC \equiv CE \equiv BC$ 1p
 În $\triangle ADC$, $\widehat{DCA} = 90^\circ - 2a^\circ$ 1p
 $AC \equiv BC \Rightarrow \triangle ABC$ isoscel $\Rightarrow \widehat{CAB} = \frac{180^\circ - (90^\circ - 2a^\circ)}{2} = 45^\circ + a^\circ$ 1p
 $\widehat{EAB} = \widehat{CAB} - \widehat{CAE} = 45^\circ + a^\circ - a^\circ = 45^\circ$ 1p
- (b) $\triangle ADC$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow \widehat{DCA} = \widehat{CAD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ACE} = 135^\circ$.
 $BCEF$ pătrat $\Rightarrow \widehat{CEM} = 45^\circ$. Deducem $AC \parallel ME$ 2p
 Cum $AM \parallel CE$, rezultă că $ACEM$ este paralelogram1p
 Dar $AC \equiv CE$, deci $ACEM$ este romb1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 14 februarie 2025
Soluții

Clasa a VIII-a

1. Determinați perechile de numere întregi (a, b) pentru care

$$25a^2 + 4b^2 + 64 < 10(7a - 2b).$$

Florin Cârstea

Soluție.

Inecuația se reprezintă ca $(5a - 7)^2 + (2b + 5)^2 < 10$, $a, b \in \mathbb{Z}$ **3p**

Rezultă $(5a - 7)^2 \in \{0, 1, 4, 9\}$, deci $5a - 7 \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. Obținem $a \in \{1, 2\}$ **3p**

Pentru $a = 1$, inecuația devine $(2b + 5)^2 < 6$. Cum $2b + 5$ este impar, avem $2b + 5 = \pm 1$.

Obținem perechile de numere întregi $(1, -3)$ și $(1, -2)$ care satisfac inecuația dată.

Pentru $a = 2$, inecuația rezultată $(2b + 5)^2 < 1$ nu are soluții întregi.**3p**

2. Determinați numerele naturale n pentru care primele două zecimale ale numărului $\sqrt{n^2 + 2n + 2}$ sunt zerouri.

Gazeta Matematică, Supliment cu Exerciții

Soluție.

Determinăm numerele naturale care satisfac condiția $\left\{ \sqrt{n^2 + 2n + 2} \right\} < 0,01$ **2p**

Din $n + 1 < \sqrt{n^2 + 2n + 2} < n + 2$ rezultă $\left[\sqrt{n^2 + 2n + 2} \right] = n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$**2p**

Condiția din enunț devine $\sqrt{n^2 + 2n + 2} - (n + 1) < 0,01$, cu $n \in \mathbb{N}$**2p**

Inecuația este echivalentă cu $n + 1 + \sqrt{n^2 + 2n + 2} > 100$, $n \in \mathbb{N}$**1p**

Fie $n \in \mathbb{N}$. Dacă $n \geq 49$, atunci $n + 1 + \sqrt{n^2 + 2n + 2} \geq 50 + \sqrt{50^2 + 1} > 50 + 50 = 100$.

Dacă $n \leq 48$, atunci $n + 1 + \sqrt{n^2 + 2n + 2} \leq 49 + \sqrt{49^2 + 1} < 49 + 50 = 99$.

În concluzie, n poate fi orice număr natural mai mare sau egal cu 49.**2p**

3. $ABCD A' B' C' D'$ este un cub. Punctul E este simetricul lui B față de C , iar punctul F este simetricul lui B' față de C' . Punctul $M \in A'D$ astfel încât $A'M = 2MD$.

(a) Aflați $\sin \widehat{DE, BF}$.

(b) Demonstrați că $(AD'F) \perp (BB'D)$.

(c) Stabiliți poziția dreptei CM față de planul $(BD'F)$, justificând răspunsul.

Dorina Rapcea

Soluție.

(a) Fie $AB = a$

Conform enunțului, $BC = CE = a$ și $B'C' = C'F = a$. Atunci $EF \parallel CC' \parallel DD'$, $DD' = EF = a$ și $DD' \perp DE$, deci $DEFD'$ este dreptunghi. Rezultă $D'F = DE = a\sqrt{2}$1p

În $\triangle BD'F$, avem $BD' = a\sqrt{3}$, $D'F = a\sqrt{2}$ și $BF = a\sqrt{5}$.

Din reciproca teoremei lui Pitagora, rezultă $\widehat{BD'F} = 90^\circ$. Cum $D'F \parallel DE$, obținem:

$$\sin(\widehat{DE, BF}) = \sin(\widehat{D'F, BF}) = \sin(\widehat{BFD'}) = \frac{BD'}{BF} = \frac{\sqrt{15}}{5} \dots\dots\dots 2p$$

(b) $DD' \perp (A'B'C')$, $D'F \subset (A'B'C') \Rightarrow DD' \perp D'F$ 1p

$D'F \perp DD'$, $D'F \perp BD' \Rightarrow D'F \perp (BB'D)$, cu $D'F \subset (AD'F) \Rightarrow (AD'F) \perp (BB'D)$ 2p

(c) Fie $AM \cap DD' = \{N\}$. Din $DM = \frac{A'M}{2}$ rezultă că N este mijlocul lui DD' 1p

$AN \parallel BF$, $AC \parallel D'F \Rightarrow (ANC) \parallel (BD'F)$.

Din $CM \subset (ANC)$ și $(ANC) \parallel (BD'F)$ rezultă $CM \parallel (BD'F)$2p

4. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată. Demonstrați că proiecția punctului A pe planul (VBC) se află pe cercul circumscris triunghiului VBC dacă și numai dacă fețele laterale ale piramidei sunt triunghiuri echilaterale.

Romeo Ilie

Soluție.

Fie O centrul bazei piramidei, M mijlocul lui BC și $H = \text{pr}_{VM}O$. Conform reciprocei Teoremei celor 3 perpendiculare, $OH \perp (VBC)$. Relațiile $VC \perp OH$ și $VC \perp BO$ implică $VC \perp (BHO)$, deci $BH \perp VC$. Dar $VH \perp BC$. Rezultă că H este ortocentrul triunghiului $\triangle VBC$2p

Fie $A' = \text{pr}_{(VBC)}A$. Astfel, $A'C = \text{pr}_{(VBC)}AC$. Cum O este mijlocul segmentului (AC) , rezultă $H = \text{pr}_{(VBC)}O$ este mijlocul segmentului $(A'C)$2p

Atunci HM este linie mijlocie în $\triangle A'BC$, cu $HM \perp BC$. Rezultă $\widehat{A'BC} = 90^\circ$, deci H este centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic $\triangle A'BC$2p

Ca urmare, punctele V, B, C și A' sunt conciclice dacă și numai dacă ortocentrul H al triunghiului $\triangle VBC$ coincide cu centrul cercului său circumscris, afirmație echivalentă cu condiția ca triunghiul $\triangle VBC$ să fie echilateral. Cum fețele laterale ale piramidei sunt triunghiuri congruente, echivalența se referă la toate fețele laterale ale piramidei.

.....3p