

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 6 februarie 2026

Soluţii

Clasa a IX-a

1. Determinaţi toate numerele de patru cifre $\overline{abcd}$ care au proprietatea că

$$(\overline{ab} + \overline{cd})^2 = \overline{abcd}.$$

(Convenim ca pentru $c = 0$, $\overline{cd} = d$.)

Romeo Ilie

Soluţie.

Fie $x = \overline{ab}$ şi $y = \overline{cd}$, cu posibilităţile $c = 0$, $d \neq 0$ şi $c = d = 0$.

Avem

$(x + y)^2 = 100x + y$, unde $x, y \in \mathbb{N}$, cu $x, y < 100$, iar $x \geq 10$ **2p**

Pentru $y = 0$, obţinem $x \in \{0, 100\}$, valori care nu convin. Presupunem $y \in \mathbb{N}^*$.

$x^2 + 2x(y - 50) + y^2 - y = 0$. $x, y \in \mathbb{N}^*$ implică Δ pătrat perfect. **2p**

Δ pătrat perfect dacă şi numai dacă $100(25 - y) + y$ este pătrat perfect **1p**

Atunci $y \leq 25$ şi y este de forma $4k$, $k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq 6$, sau $y = 8k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 3$.

De asemenea, ultima cifră a lui y nu poate fi 2, 3, 7 sau 8. **2p**

Analizând toate cazurile posibile, obţinem $y \in \{1, 25\}$ **1p**

Pentru $y = 1$ obţinem $x = 98$. Pentru $y = 25$ obţinem $x = 20$ sau $x = 30$.

Deci, numerele căutate sunt: 9801, 2025 şi 3025. **1p**

2. Rezolvaţi ecuaţiile:

(a) $2025 \cdot x^2 - 90 \cdot [x] + 1 = 0$;

(b) $\frac{x}{2} - \frac{1013}{[x]} = \frac{[x]}{2} - \frac{1013}{x}$.

Prin $[a]$ am notat partea întreagă a numărului real a .

Ioana Maşca

Soluţie.

(a) Rescriem ecuaţia sub forma $(45x)^2 - 2 \cdot 45[x] + 1 = 0$.

Cum $[x] \leq x$, avem $-x \leq -[x]$ **1p**

$0 = (45x)^2 - 2 \cdot 45[x] + 1 \geq (45x)^2 - 2 \cdot 45x + 1 = (45x - 1)^2 \geq 0$ **2p**

Atunci $45x = 1$. Dar $x = \frac{1}{45}$ nu verifică ecuaţia **1p**

- (b) Avem, pe rând,
- $$\left(\frac{x}{2} - \frac{[x]}{2}\right) - 1013 \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) = 0, \text{ cu } x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1) \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$
- $$(x - [x]) \left(\frac{1}{2} - \frac{1013}{x \cdot [x]}\right) = 0, \text{ de unde } x = [x], \text{ deci } x \in \mathbb{Z}^* \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$
- sau $x = \frac{2026}{[x]}$, ceea ce implică $[x] \leq \frac{2026}{[x]} < [x] + 1 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$

Vom avea următoarele cazuri:

- i. $[x] > 0 \Rightarrow [x]^2 \leq 2026 < [x]^2 + [x]$, de unde $[x] = 45$ și $x = \frac{2026}{45} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$
- ii. $[x] < 0 \Rightarrow [x]^2 + [x] < 2026 \leq [x]^2$. Dar sistemul de inecuații nu are soluții în $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $\mathbb{Z}^* \cup \left\{ \frac{2026}{45} \right\} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$

3. Demonstrați că valoarea minimă a expresiei $\max\left(a + \frac{1}{4b}, b + \frac{1}{4a}\right)$ este egală cu valoarea maximă a expresiei $\min\left(\frac{1}{a + \frac{1}{4b}}, \frac{1}{b + \frac{1}{4a}}\right)$, unde $a, b > 0$.

Romeo Ilie

Soluție. $\left(a + \frac{1}{4b}\right) + \left(b + \frac{1}{4a}\right) = \left(a + \frac{1}{4a}\right) + \left(b + \frac{1}{4b}\right) \geq 1 + 1 = 2 \dots\dots\dots \mathbf{2p}$

Deci, $\max\left(a + \frac{1}{4b}, b + \frac{1}{4a}\right) \geq 1 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$

$a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow \max\left(a + \frac{1}{4b}, b + \frac{1}{4a}\right) = 1$, deci $\min_{a,b>0} \max\left(a + \frac{1}{4b}, b + \frac{1}{4a}\right) = 1 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$

$\frac{1}{a + \frac{1}{4b}} \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{4b}} = \frac{16ab}{(4ab + 1)^2} \leq 1 \dots\dots\dots \mathbf{3p}$

Deci, $\min\left(\frac{1}{a + \frac{1}{4b}}, \frac{1}{b + \frac{1}{4a}}\right) \leq 1 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$

Egalitatea se obține pentru $a = b = \frac{1}{2}$ și $\max_{a,b>0} \min\left(a + \frac{1}{4b}, b + \frac{1}{4a}\right) = 1 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$

4. Fie $ABCD$ un patrulater și O intersecția diagonalelor acestuia. În exteriorul său se consideră punctele E și F astfel încât D și C sunt centre de greutate ale triunghiurilor AOE și BFO . Arătați că $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă $\vec{EF} = 2\vec{AB}$.

Gazeta Matematică

Soluție.

Notăm $\vec{r}_M$ vectorul de poziție al punctului M din plan.

Avem $\vec{r}_D = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_O + \vec{r}_E}{3} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$

$\vec{r}_C = \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_O + \vec{r}_F}{3}$	2p
$ABCD$ paralelogram $\Leftrightarrow \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_C - \vec{r}_D$	2p
$\vec{r}_B - \vec{r}_A = \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_F - \vec{r}_E - \vec{r}_A}{3}$	2p
$\vec{EF} = 2\vec{AB}$	1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 6 februarie 2026

Soluţii

Clasa a X-a

1. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

(a) Demonstraţi că există $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| = 1$ astfel încât $z_i = \lambda \cdot |z_i|$, $i \in \{1, 2\}$.

(b) Demonstraţi că $\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right| \geq \frac{4}{|z_1| + |z_2|}$.

Soluţie.

(a) Aplicăm inegalitatea triunghiului $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, cu egalitate dacă z_1 şi z_2 au acelaşi argument α **2p**

Rezultă că $z_1 = |z_1| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ şi $z_2 = |z_2|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Atunci $\lambda = \cos \alpha + i \sin \alpha$ **3p**

(b)

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right| \geq \frac{4}{|z_1| + |z_2|} &\Leftrightarrow \left| \frac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot z_2} \right| \geq \frac{4}{|z_1| + |z_2|} \\ \Leftrightarrow \frac{|z_1 + z_2|}{|z_1| \cdot |z_2|} \geq \frac{4}{|z_1| + |z_2|} &\Leftrightarrow \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_1| \cdot |z_2|} \geq \frac{4}{|z_1| + |z_2|} \\ \Leftrightarrow (|z_1| + |z_2|)^2 \geq 4|z_1| \cdot |z_2| &\Leftrightarrow (|z_1| - |z_2|)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

..... **4p**

2. Fie $a, b, c \in (0, 1)$. Demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{\log_a^2 b}{2} + \frac{\log_b^2 c}{3} + \frac{\log_c^2 a}{4} > 1.$$

Florin Cârstea

Soluţie.

$\log_a b, \log_b c, \log_c a \in (0, \infty)$ **1p**

Conform inegalităţii Cauchy-Schwarz, pentru $x, y, z \in \mathbb{R}$ şi $t, u, v > 0$, avem

$$\left(\frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+u+v}} + \frac{y}{\sqrt{u}} \cdot \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{t+u+v}} + \frac{z}{\sqrt{v}} \cdot \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{t+u+v}} \right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{x^2}{t} + \frac{y^2}{u} + \frac{z^2}{v} \right) \cdot \left(\frac{t}{t+u+v} + \frac{u}{t+u+v} + \frac{v}{t+u+v} \right),$$

de unde obținem inegalitatea $\frac{x^2}{t} + \frac{y^2}{u} + \frac{z^2}{v} \geq \frac{(x+y+z)^2}{t+u+v}$ **2p**

Atunci $\frac{\log_a^2 b}{2} + \frac{\log_b^2 c}{3} + \frac{\log_c^2 a}{4} \geq \frac{(\log_a b + \log_b c + \log_c a)^2}{9}$ **1p**

Conform inegalității mediilor, obținem:

$\log_a b + \log_b c + \log_c a \geq 3 \sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} = 3$ **3p**

Rezultă $\frac{(\log_a b + \log_b c + \log_c a)^2}{9} \geq 1$. Prin tranzitivitate obținem inegalitatea

$\frac{\log_a^2 b}{2} + \frac{\log_b^2 c}{3} + \frac{\log_c^2 a}{4} \geq 1$ **1p**

Egalitatea nu pot avea loc, deci inegalitatea este strictă **1p**

3. Determinați cel mai mic număr natural k cu proprietatea că pentru orice funcție bijectivă $f : \{1, 2, \dots, 2026\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 2026\}$ există $i \in \{1, 2, \dots, 2026\}$ astfel încât $|f(i) - i| \leq k$.

Gazeta Matematică, enunț modificat

Soluție.

Pentru o funcție arbitrară, în particular bijectivă, $f : \{1, 2, \dots, 2026\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 2026\}$ avem $|f(1013) - 1013| \leq 1013$. Rezultă $k \leq 1013$ **4p**

Considerăm funcția bijectivă $f : \{1, 2, \dots, 2026\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 2026\}$, definită prin

$$f(i) = \begin{cases} i + 1013, & i \in \{1, 2, \dots, 1013\} \\ i - 1013, & i \in \{1014, 1015, \dots, 2026\} \end{cases}$$

Funcția f are proprietatea $|f(i) - i| = 1013, \forall i \in \{1, 2, \dots, 2026\}$. Atunci $k \geq 1013$ **4p**

Obținem $k = 1013$ **1p**

4. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

(a) Demonstrați inegalitatea:

$$\sqrt[n]{\sin^2(x)} + \sqrt[n]{\cos^2(x)} \leq \sqrt[n]{2^{n-1}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Folosind, eventual, punctul (a), demonstrați inegalitatea:

$$\sqrt[n]{\sin^{n+1}(x)} + \sqrt[n]{\cos^{n+1}(x)} \leq \sqrt[n]{2^{n-1}}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Romeo Ilie

Soluție.

- (a) Din convexitatea funcției $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ rezultă inegalitatea

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}, \quad \forall a, b \geq 0.$$

..... **3p**
 Pentru $a = \sqrt[n]{\sin^2(x)}$ și $b = \sqrt[n]{\cos^2(x)}$, cu $x \in \mathbb{R}$, obținem

$$\left(\frac{\sqrt[n]{\sin^2(x)} + \sqrt[n]{\cos^2(x)}}{2}\right)^n \leq \frac{\sin^2(x) + \cos^2 x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Rezultă $\sqrt[n]{\sin^2(x)} + \sqrt[n]{\cos^2(x)} \leq \sqrt[n]{2^{n-1}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ **3p**

- (b) Fie $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Avem $\sin(x), \cos(x) \geq 0$. Conform inegalității Cauchy-Schwarz și inegalității (a), obținem

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{\sin^{n+1}(x)} + \sqrt[n]{\cos^{n+1}(x)}\right)^2 &= \left(\sin x \cdot \sqrt[n]{\sin(x)} + \cos(x) \cdot \sqrt[n]{\cos(x)}\right)^2 \\ &\leq (\sin^2(x) + \cos^2(x)) \cdot \left(\sqrt[n]{\sin^2(x)} + \sqrt[n]{\cos^2(x)}\right) \leq \sqrt[n]{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Rezultă $\sqrt[n]{\sin^{n+1}(x)} + \sqrt[n]{\cos^{n+1}(x)} \leq \sqrt[n]{2^{n-1}}$ **3p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 14 februarie 2025

Soluţii

Clasa a XI-a

1. Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$ pentru care există matricele inversabile $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $AB + BA = O_n$.

Gazeta Matematică, Supliment cu Exerciţii

Soluţie.

Înmulţim relaţia dată cu B^{-1} la dreapta şi obţinem $A = -B \cdot A \cdot B^{-1}$. Trecând la determinant, $\det(A) = (-1)^n \cdot \det(B) \cdot \det(A) \cdot \det(B^{-1})$, de unde $(-1)^n = 1$, prin urmare n e par **3p**

Arătăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există două matrice $A_{2n}, B_{2n} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ cu proprietăţile din enunţ.

Pentru $n = 1$, alegem $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Avem $A_2 B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$B_2 A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A_2 B_2 + B_2 A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$ **3p**

Pentru $n > 1$, considerăm matricele $2n \times 2n$ bloc-diagonale, inversabile,

$A_{2n} = \text{diag}(\underbrace{A_2, \dots, A_2}_{n \text{ ori}})$ şi $B_{2n} = \text{diag}(\underbrace{B_2, \dots, B_2}_{n \text{ ori}})$

Explicit, acestea au forma:

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avem $A_{2n} B_{2n} + B_{2n} A_{2n} = \text{diag}(A_2 B_2 + B_2 A_2, \dots, A_2 B_2 + B_2 A_2) = O_{2n}$ **3p**

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(R)$ ce satisfac relaţia $(AB - BA)^{2026} = I_2$. Demonstraţi că

$$(AB - BA)^2 = I_2.$$

Soluţie.

$\text{tr}(AB - BA) = 0$ **1p**

Din ecuaţia caracteristică obţinem $(AB - BA)^2 = -d \cdot I_2$, unde $d = \det(AB - BA)$.

..... **4p**

Atunci $I_2 = (AB - BA)^{2026} = (-d)^{1013} \cdot I_2$. Cum $d \in \mathbb{R}$, obţinem $-d = 1$ **3p**

Rezultă $(AB - BA)^2 = I_2$ **1p**

3. Se consideră şirul definit prin $x_1 = \sqrt{2}$ şi $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

Soluţie.

Prin inducţie se demonstrează că $1 < x_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ **3p**

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} - x_n = \sqrt{2 + x_n} - x_n = \frac{2 + x_n - x_n^2}{\sqrt{2 + x_n} + x_n} > 0$, deoarece $x_n \in (1, 2)$.

Atunci şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător..... **2p**

Rezultă că $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in (1, 2]$ **1p**

Trecem la limită în relaţia de recurenţă şi obţinem $l = \sqrt{2 + l}$ Rezultă $l = 2$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ **3p**

4. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$.

(a) Calculaţi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n}}{\sqrt{n}}$.

(b) Arătaţi că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$.

(c) Arătaţi că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ conţine un subşir $(s_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s_{n+1}} + \frac{1}{s_{n+2}} + \dots + \frac{1}{s_{2n}} \right) = \ln 2.$$

Soluţie.

(a) $\frac{e^{a_n}}{\sqrt{n}} = e^{a_n - \ln \sqrt{n}} = e^{a_n - \frac{1}{2} \ln n}$. Fie $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$a_n - \frac{1}{2} \ln n = b_{2n} - \frac{1}{2} b_n - \frac{1}{2} \ln n = (b_{2n} - \ln 2n) - \frac{1}{2} (b_n - \ln n) + \ln 2$ **2p**

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - \ln n) = c$ (constanta lui Euler), avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{1}{2} \ln n \right) = \frac{c}{2} + \ln 2.$$

Rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{e^c}$ **1p**

(b) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = b_{2n} - b_n = (b_{2n} - \ln 2n) - (b_n - \ln n) + \ln 2$... **2p**
Rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{2n} - b_n) = c - c + \ln 2 = \ln 2.$$

..... **1p**

(c) Demonstrăm că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $k_n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $[a_{k_n}] = n$.

Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{1}{2} \ln n \right) + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$. Astfel, șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător și divergent.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_p \geq n$. Notăm k_n cel mai mic $p \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a_p \geq n$. Atunci, $a_{k_n} - \frac{1}{2k_n - 1} = a_{k_n - 1} < n \leq a_{k_n}$, de unde

obținem: $n \leq a_{k_n} < n + \frac{1}{2k_n - 1} \leq n + 1$, deci $[a_{k_n}] = n$ **1p**

Deoarece $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător, șirul $(k_n)_{n \geq 1}$ strict crescător, deci $(a_{k_n})_{n \geq 1}$ este un subșir al șirului $(a_n)_{n \geq 1}$. Definim $s_n = a_{k_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Din alegerea făcută, rezultă că

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{s_{n+1}} + \frac{1}{s_{n+2}} + \dots + \frac{1}{s_{2n}} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n},$$

pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$. Conform (b), $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$

și $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) +$
 $+ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) = \ln 2 + 0 = \ln 2$. Conform criteriului "clește",

rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s_{n+1}} + \frac{1}{s_{n+2}} + \dots + \frac{1}{s_{2n}} \right) = \ln 2$ **2p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 6 februarie 2026

Soluţii

Clasa a XII-a

1. Fie M o mulţime cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

- (a) Câte legi de compoziţie se pot defini pe M ?
- (b) Câte dintre acestea sunt comutative?
- (c) Câte au element neutru?

Gazeta Matematică, Supliment cu Exerciţii

Soluţie,

- (a) Numărul legilor de compoziţie este egal cu numărul funcţiilor $f : M \times M \rightarrow M$, adică n^{n^2} **3p**
- (b) Tabla de operaţie a unei legi de compoziţie comutativă este simetrică faţă de diagonala principală, deci vor fi $n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ căsuţe ale tablei de operaţie care pot completate arbitrar, cu oricare din cele n elemente ale mulţimii M . Rezultă că numărul legilor comutative este $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ **3p**
- (c) Dacă $e \in M$ este elementul neutru al legii de compoziţie f , atunci elementele de pe linia şi coloana lui e sunt fixate ($e * a = a * e = a$, $\forall a \in M$), deci $2n - 1$ căsuţe din tabla de operaţie sunt completate în mod unic, iar celelalte $n^2 - (2n - 1) = (n - 1)^2$ căsuţe pot fi completate arbitrar, cu oricare din cele n elemente ale mulţimii M . Cum e poate fi oricare element al mulţimii M , numărul legilor cu element neutru este egal cu $n \cdot n^{(n-1)^2} = n^{n^2-2n+2}$ **3p**

2. (a) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ este bijectivă.
- (b) Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $(\mathbb{R}, \circ)$ este grup abelian, izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$.

Gazeta Matematică, Supliment cu Exerciţii

Soluţie.

- (a) Demonstrarea bijectivităţii **3p**

- (b) Se verifică prin calcul relația $f(x+y) = f(x) \circ f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ **3p**
Cum f este bijectivă, deci inversabilă, avem

$$x \circ y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cum $(\mathbb{R}, +)$ este grup abelian, rezultă că $(\mathbb{R}, \circ)$ este de asemenea grup abelian, izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$ **3p**

3. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $I_n = \frac{\pi}{4}$ și $I_{n+1} = \int_0^{I_n} \sin^{2026}(x) dx$, pentru orice $n \geq 1$.

- (a) Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit.
(b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

Romeo Ilie

Soluție.

- (a) $I_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (inducție) **1p**

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{I_n} (\sin^{2026}(x) - 1) dx \leq 0$, $\forall n \geq 1$. și rezultă că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este descrescător **2p**

$0 \leq I_n \leq I_1$, $(I_n)_{n \geq 1}$ implică șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ mărginit. **2p**

- (b) **Soluția 1.**

$$I_{n+1} = \int_0^{I_n} \sin^{2026}(x) dx \leq \int_0^{I_n} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2026} dx = I_n \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2026}, \quad \forall n \geq 1. \text{ Atunci}$$

$$0 \leq I_n \leq I_{n-1} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2026} \leq I_{n-2} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2026}\right]^2 \leq \dots \leq I_1 \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2026}\right]^{n-1},$$

pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$ **3p**

Din criteriul majorării, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ **1p**

Soluția 2.

Șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent, deci există $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n \geq 0$.

Dacă presupunem că $\ell > 0$, trecând la limită în relația $I_{n+1} = \int_0^{I_n} \sin^{2026}(x) dx$,

obținem $\ell = \int_0^{\ell} \sin^{2026}(x) dx < \ell$, contradicție.

Deci, $\ell = 0$ **4p**

4. Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă și periodică, de perioadă $T > 0$, arătați că:

(a) $\int_0^{nT} f(x)dx = n \int_0^T f(x)dx, \forall n \in \mathbb{N}.$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt.$

(a) $\int_0^{nT} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(x)dx \dots\dots\dots 1p$

Cu schimbarea de variabilă $u = x - kT$, obținem $\int_{kT}^{(k+1)T} f(x)dx = \int_0^T f(u)du$,
 pentru oricare $k \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 1p$

Prin urmare, $\int_0^{nT} f(x)dx = n \int_0^T f(x)dx \dots\dots\dots 1p$

(b) Fie $x > 0$.

Notăm $n_x = \left[\frac{x}{T} \right] \in \mathbb{N}$. Rezultă $n_x T \leq x < n_x T + T$. Fie $r_x = x - n_x T \in [0, T)$.

$\int_0^x f(t)dt = \int_0^{n_x T} f(t)dt + \int_{n_x T}^x f(t)dt = n_x \int_0^T f(t)dt + \int_{n_x T}^{n_x T + r_x} f(t)dt \dots\dots\dots 2p$

Deoarece f este periodică, $Im f = f([0, T])$. Funcția f este continuă pe compactul $[0, T]$. Conform teoremei lui Weierstrass, f este mărginită, deci există $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M, \forall x \in [0, T]$. Rezultă $|f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$.

Atunci $\left| \int_{n_x T}^{n_x T + r_x} f(t)dt \right| \leq \int_{n_x T}^{n_x T + r_x} |f(t)|dt \leq M r_x \leq M T \dots\dots\dots 2p$

Evident, $\lim_{x \rightarrow \infty} n_x = \infty$. Rezultă

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n_x \int_0^T f(t)dt}{n_x T + r_x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{n_x T}^{n_x T + r_x} f(t)dt}{n_x T + r_x} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt.$$

$\dots\dots\dots 2p$