Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală - Dâmboviţa
7 februarie 2026

CLASA A VIII-A

Subiectul 1.

a) Determinaţi numerele întregi a şi b care au proprietatea

$$(a+1, b-1) \subset (\sqrt{360}, \sqrt{2025}] \subset (a, b)$$

b) Dacă a, b, c sunt numere reale, să se arate că

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

c) Să se arate că toate numerele naturale de trei cifre $\overline{abc}$ ale căror cifre verifică relaţia $a^3+b^3+c^3 = 3abc$ se divid cu 37.

Subiectul 2.

a) Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Arătaţi că n e pătrat perfect.

b) Fie $m, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{m}+\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Arătaţi că m şi n sunt pătrate perfecte.

c) Fie $m, n, p \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$. Arătaţi că m, n şi p sunt pătrate perfecte.

Subiectul 3.

Determinaţi toate perechile de numere naturale (m, n) cu proprietatea $m^3 = n^3+n^2+7n+1$.

Subiectul 4.

Fie $ABCD$ un tetraedru. Notăm cu M şi P mijloacele muchiilor AB şi AC. Fie $Q \in AC$ astfel încât $CQ = 2AQ$. Construim punctele S şi T simetricele punctelor D şi B faţă de M respectiv P. Pe semidreapta (DQ considerăm un punct E astfel încât $DQ = 2QE$ si Q e între D şi E. Arătaţi că punctele T, E şi S sunt coliniare.

GM 6-7-8 2025

- 10 puncte din oficiu. Fiecare problema se notează cu 22.5 puncte. Punctajul maxim este de 100 de puncte
- Toate subiectele sunt obligatorii
- 3 ore timp de lucru