

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 7.02.2026–

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL 1 (22,5p)

Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = 15$ cm și $BC = 18$ cm. În punctul A se ridică perpendiculara AM pe planul triunghiului ABC , cu $AM = 12$ cm. Semidreptele AE și AF sunt bisectoarele unghiurilor MAB și MAC , cu $E \in MB$ și $F \in MC$.

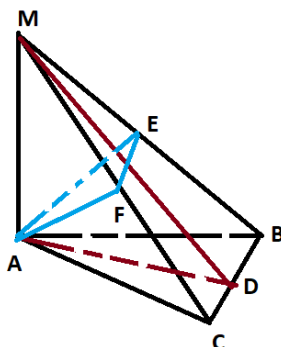
9,5p a) Calculați lungimile segmentelor MB și MD , unde D este mijlocul segmentului BC .

7p b) Arătați că $EF \parallel (ABC)$

6p c) Calculați distanța de la punctul F la planul (ABC) .

Soluție:

a)



Triunghiurile MAB și MAD sunt dreptunghice

3p

$$MB = 3\sqrt{41}\text{cm}$$

2,5p

$$AD = 12\text{cm}$$

2p

$$MD = 12\sqrt{2}\text{ cm}$$

2p

b) În triunghiurile MAB și MAC aplicăm teorema bisectoarei și obținem $\frac{MA}{AB} = \frac{ME}{EB}$ și respectiv $\frac{MA}{AC} = \frac{MF}{FC}$. Cum $AB = AC$, se obține $\frac{ME}{EB} = \frac{MF}{FC}$

3p

Se obține din reciproca teoremei lui Thales $EF \parallel BC$

2p

$$EF \parallel BC, BC \subset (ABC), EF \not\subset (ABC) \Rightarrow EF \parallel (ABC)$$

2p

c) Fie $FN \perp AC, N \in AC, MA \perp AC \Rightarrow FN \parallel MA, MA \perp (ABC) \Rightarrow FN \perp (ABC) \Rightarrow d(F, (ABC)) = FN$ 3p

$$\frac{MF}{FC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{CF}{MC} = \frac{5}{9}; \Delta CFN \sim \Delta CMA \Rightarrow \frac{CF}{CM} = \frac{FN}{MA} = \frac{CN}{CA}$$

$$\frac{FN}{MA} = \frac{5}{9} \Rightarrow FN = \frac{20}{3} \text{ cm} \quad \text{3p}$$

SUBIECTUL 2 (22,5p)

11,5p a) Demonstrați că $\frac{\sqrt{x(x+1)}}{2x+1} \leq \frac{1}{2}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

11p b) Comparați numărul real $a = \frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{3} + \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{5} + \frac{\sqrt{3 \cdot 4}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{2026 \cdot 2027}}{4053}$ și numărul real $b = \sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + 2025}$.

Soluție:

a) Dacă $x \in (0, \infty)$, avem $\frac{\sqrt{x(x+1)}}{2x+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x+1)} \leq 2x+1 \Leftrightarrow$ 3,5p

$$4x(x+1) \leq (2x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x \leq 4x^2 + 4x + 1 \text{ -adevărat} \quad \text{4p}$$

b) Cum $\frac{\sqrt{x(x+1)}}{2x+1} \leq \frac{1}{2}$ oricare $x \in (0, \infty)$, avem

$$\frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{3} \leq \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{5} \leq \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3 \cdot 4}}{7} \leq \frac{1}{2} \text{ și } \frac{\sqrt{2026 \cdot 2027}}{4053} \leq \frac{1}{2}, \text{ deci} \quad \text{4p}$$

$$a \leq \frac{2026}{2}, \text{ deci } a \leq 1013. \quad \text{4p}$$

$$b = \sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + 2025} = 1013 \quad \text{3p}$$

Așadar $a \leq b$.

SUBIECTUL 3 (22,5p)

Determinați numerele $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\frac{10 \cdot \overline{ab}}{c} - \frac{\overline{bc}}{a} = 99$ și stabiliți câte sunt.

GAZETA MATEMATICĂ

Soluție:

$$\frac{10 \cdot \overline{ab}}{c} - \frac{\overline{bc}}{a} = 99 \Leftrightarrow \frac{10(10a+b)}{c} - \frac{10b+c}{a} = 99 \quad \text{4,5p}$$

$$100a^2 - 99ac - c^2 + 10ab - 10bc = 0 \quad \text{4p}$$

$$(100a+c)(a-c) + 10b(a-c) = 0 \quad \text{4p}$$

$$\overline{abc} \cdot (a-c) = 0 \quad \text{3p}$$

$$\text{Dar } \overline{abc} \neq 0 \Rightarrow a-c=0 \Rightarrow c=a \Rightarrow \overline{abc} = \overline{aba}, a, b \neq 0 \quad \text{3p}$$

$a, b \in \{1, 2, 3, \dots, 9\} \Rightarrow$ sunt 81 de numere naturale de trei cifre care verifică relația din enunțul problemei.

4p

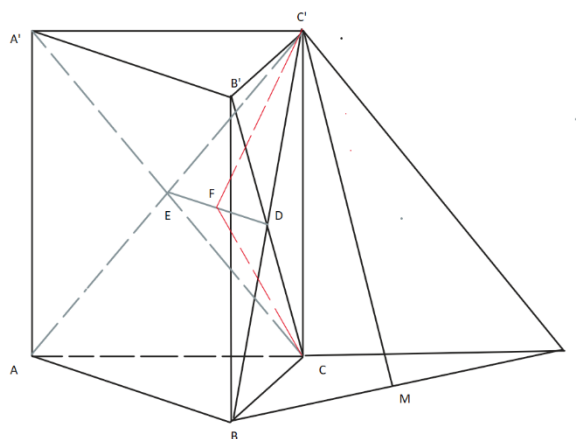
SUBIECTUL 4 (22,5p)

Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC , $AB = 8\sqrt{6} \text{ cm}$ și $AA' = 12\sqrt{2} \text{ cm}$.

12,5p a) Demonstrați că planele (ABC') și $(A'B'C)$ sunt perpendiculare.

10p b) Calculați sinusul unghiului dintre dreptele $A'C$ și BC' .

Profesor Anton Negrilă



Soluție:

a) Notăm D și E intersecția dreptelor BC' și $B'C$, respectiv AC' și CA' .

Intersecția planelor (ABC') și $(A'B'C)$ este dreapta DE

F este mijlocul segmentului DE ; $C'F \perp DE$

$\triangle C'FC$ dreptunghic isoscel ($C'F = CF = 12 \text{ cm}$)

Deci ; $C'F \perp (CDE)$, $C'F \subset (DEC)$, deci planele sunt perpendiculare.

4,5p

3p

3p

2p

b) Notăm H simetricul lui A față de C ; $A'C'HC$ paralelogram

Unghiul dintre dreptele $A'C$ și BC' devine unghiul $BC'H$

$\triangle ABH$ dreptunghic (reciproca teoremei medianei)

Calculul ariei triunghiului $BC'H$

2p

3p

2p

2p

$$\sin \widehat{BC'H} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

1p

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.