

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 5 FEBRUARIE 2026
CLASA A XI-A, SUBIECTE

1. (21p) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Calculați $\det(5A)$.

b) Determinați matricea A^n , oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$

c) Calculați $\det(A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2026})$.

2. (21p) Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + \frac{3}{4}$, oricare ar fi $n \geq 1$, $a_1 = \frac{2025}{2026}$.

a) Demonstrați că $x^2 - x + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați formula termenului general a șirului a_n , $n \geq 1$ și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

c) Demonstrați că $\left(a_1 - \frac{1}{2}\right)\left(a_2 - \frac{1}{2}\right) \dots \left(a_n - \frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{506}{1013}\right)^n$, oricare ar fi $n \geq 1$.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

3. (21p) Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ care verifică simultan condițiile $AB + BA = A$ și $B^{2026} = O_2$. Calculați A^{2026} .

George-Florin Șerban, Brăila

4. (21p) Calculați: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$. b) $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+2x} \cdot \dots \cdot \sqrt{1+nx} - 1}{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de trei ore. Se acordă 16 puncte din oficiu.

2. Subiectele și baremele vor fi afișate pe site-ul www.isjbraila.ro, secțiunea Discipline/Domenii, Matematică.