

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 5 FEBRUARIE 2026

CLASA A XII-A, SUBIECTE

1. (21p) Pe mulțimea $G = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ considerăm legea de compoziție asociativă “*”, definită

prin $x * y = 4xy + 2x + 2y + \frac{1}{2}$, oricare ar fi $x, y \in G$.

a) Arătați că $x * y = (2x+1)(2y+1) - \frac{1}{2}$, oricare ar fi $x, y \in G$.

b) Arătați că legea “*” admite elementul neutru $e = -\frac{1}{4}$.

c) Calculați $\left(-\frac{2025}{2}\right) * \left(-\frac{2023}{2}\right) * \dots * \left(-\frac{1}{2}\right) * \frac{1}{2} * \dots * \frac{2025}{2}$.

2. (21p) Arătați că $\int_0^{\pi} \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x^2+1}} \left(\cos x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}} - 1$.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

3. (21p) Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ -8 & -4 & -4 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x, y) = x \cdot I_3 + y \cdot A$,

unde $x \in \mathbb{R}^*$ și $y \in \mathbb{R}$. Notăm mulțimea $G = \{B(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}\}$.

a) Arătați că $A^2 = O_3$.

b) Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

c) Arătați că $\det B(x, y)$ nu depinde de y .

4. (21p) Arătați că $\frac{\pi}{2\sqrt{30}} \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\arctg x}{\sqrt{x^4+1}} dx \leq \frac{3\pi}{2\sqrt{30}}$.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de trei ore. Se acordă 16 puncte din oficiu.

2. Baremele vor fi afișate la avizierul unităților școlare și pe site-urile: www.isjbraila.ro, secțiunea Discipline/Domenii, Matematică.