OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanța, 7.02.2026
Clasa a VI-a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL 1 (30 puncte)

Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} / 56 \leq 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} \leq 448\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \,/\, 2026 \vdots (y+1)\}$.

a) Arătați că mulțimile A și B sunt disjuncte;
b) Aflați câte submulțimi cu cel mult două elemente are mulțimea $C = A \cup B$;
c) Arătați că pentru orice $x \in B$ există $y \in A$ astfel încât $(x+y) \vdots 4$.

Soluție

a) $56 \leq 2^x(1+2+2^2) \leq 448$ 2p
$56 \leq 2^x \cdot 7 \leq 448 \Leftrightarrow 8 \leq 2^x \leq 64$ 1p
$2^3 \leq 2^x \leq 2^6 \Rightarrow 3 \leq x \leq 6$ 1p
$A = \{3;4;5;6\}$ 2p
$2026 \vdots (y+1) \Rightarrow (y+1) \in \{1;2;1013;2026\}$ 1p
$B = \{0;1;1012;2025\}$ 2p
$A \cap B = \emptyset \Rightarrow$ A și B sunt mulțimi disjuncte 1p

b) $C = \{0;1;3;4;5;6;1012;2025\} \Rightarrow card\ C = 8$ 2p
C are o submulțime cu 0 elemente 2p
C are 8 submulțimi cu 1 element 2p
C are (7· 8):2 = 28 submulțimi cu 2 elemente 2p
Deci C are 1+8+28=37 submulțimi cu cel mult două elemente.....2p

c) Pentru x = 0 ∈ B se găsește y = 4 ∈ A astfel încât 0+4=4 ⋮ 4 ..... 2p
Pentru x = 1 ∈ B se găsește y = 3 ∈ A astfel încât 1+3=4 ⋮ 4 ..... 2p
Pentru x = 1012 ∈ B se găsește y = 4 ∈ A astfel încât 1012+4=1016 ⋮ 4 ..... 2p
Pentru x = 2025 ∈ B se găsește y = 3 ∈ A astfel încât 2025+3=2028 ⋮ 4 ..... 2p
Prin urmare pentru orice $x \in B$ există $y \in A$ astfel încât $(x+y) \vdots 4$ 2p

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

Determinați numere naturale a și b pentru care $4 \cdot (a,b) + [a,b] = a + 25$. Am notat cu (a,b)și $[a,b]$ cel mai mare divizor comun, respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b.

Soluție

Fie $d = (a;b) \Rightarrow a = d \cdot x, b = d \cdot y, (x;y) = 1, [a,b] = d \cdot x \cdot y, x, y \in N$ 2p
$4d + dxy = dx + 25 \Leftrightarrow 4d + dxy - dx = 25$ 2p
$d(4 + xy - x) = 25 \Rightarrow d \in D_{25} = \{1;5;25\}$ 3p
$d = 1 \Rightarrow 4 + xy - x = 25 \Rightarrow x(y-1) = 21$ 3p
Din $x(y-1) = 21$ și $(x;y) = 1 \Rightarrow (x;y) \in \{(1;22);(3;8);(7;4);\ (21;2)\} \Rightarrow (a;b) \in \{(1;22);(3;8);(7;4);\ (21;2)\}$.....4p
$d = 5 \Rightarrow 4 + xy - x = 5 \Rightarrow x(y-1) = 1$ 2p
Din $x(y-1) = 1$ și $(x;y) = 1 \Rightarrow (x;y) \in \{(1;2)\} \Rightarrow (a;b) \in \{(5;10)\}$.....2p
$d = 25 \Rightarrow 4 + xy - x = 1$ *nu convine* 2p

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

a) Determinați numărul minim și numărul maxim de divizori ai numărului $\overline{abcabc}$, știind că $\overline{abc}$ este pătrat perfect.

b) Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ care verifică simultan condițiile:

i) Numerele $a+c$ și $a+b+c+d$ sunt pătrate perfecte consecutive.

ii) Numerele $a+b, d-a, b+d$ sunt trei numere prime consecutive, în această ordine.

Soluție

a) $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1001$ 2p

$\overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ 2p

Dacă $\overline{abc} \in \{11^2;\ 13^2\} \Rightarrow Nr.minim\ divizori = (1+1)(1+1)(3+1) = 16$....3p

Dacă $\overline{abc} = 30^2 \Rightarrow \overline{abcabc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \Rightarrow Nr.maxim\ de\ divizori =$

$(1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1) \cdot (2+1) \cdot (2+1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 216$ 3p

b) Dacă toate sunt impare $\Rightarrow$ $a+b+d-a =$ par. Contradicție cu $b+d =$ prim > 3. $\Rightarrow$

$a+b = 2 \Rightarrow d-a = 3 \Rightarrow b+d = 5$ 4p

$a+b = 2$, a cifra nenula$\Rightarrow a = b = 1, d = 4$ *respectiv a=2, b=0, d=5*.....3p

$1+c$ și $6+c$ pătrate perfecte consecutive $\Longrightarrow c = 3$. *respectiv c=2*.....2p

$\overline{abcd} = 1134$; 2025.....1p

SUBIECTUL 4 (20 puncte)

Se consideră punctele $A_1, A_2, \dots, A_{15}$, în această ordine, situate pe cercul $C(O,R)$. Știind că arcele $\overset{\frown}{A_1A_2} = x^o + 1^o, \overset{\frown}{A_2A_3} = x^o + 2^o, \overset{\frown}{A_3A_4} = x^o + 3^o, \dots, \overset{\frown}{A_{14}A_{15}} = x^o + 14^o, \overset{\frown}{A_{15}A_1} = x^o + 15^o$

a) Să se demonstreze că semidreapta OA_1 este perpendiculară pe semidreapta OA_{13}.

b) Să se determine măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A_4OA_5$ și $\sphericalangle A_8OA_9$.

Soluție

a) $\overset{\frown}{A_1A_2} + \overset{\frown}{A_2A_3} + \overset{\frown}{A_3A_4} + \dots + \overset{\frown}{A_{14}A_{15}} + \overset{\frown}{A_{15}A_1} = 360^o$.....2p

$15 \cdot x^o + 1^o + 2^o + 3^o + \dots + 15^o = 360^o$ 2p

$15 \cdot x^o + 120^o = 360^o \Rightarrow x^o = 16^o$ 3p

$\sphericalangle A_1OA_2 = \overset{\frown}{A_1A_2} = 17^o, \sphericalangle A_2OA_3 = \overset{\frown}{A_2A_3} = 18^o, \dots, \sphericalangle A_{14}OA_{15} = 30^o, \sphericalangle A_{15}OA_1 = \overset{\frown}{A_{15}A_1} = 31^o$

$\sphericalangle A_1OA_{13} = \sphericalangle A_1OA_{15} + \sphericalangle A_{15}OA_{14} + \sphericalangle A_{14}OA_{13} = 31^o + 30^o + 29^o = 90^o \Rightarrow OA_1 \perp OA_{13}$...3p

b) Fie OM bisectoare $\sphericalangle A_4OA_5 \Rightarrow \sphericalangle A_4OM = \sphericalangle MOA_5 = \frac{\sphericalangle A_4OA_5}{2} = \frac{20^o}{2} = 10^o$ 3p

Fie ON bisectoare $\sphericalangle A_8OA_9 \Rightarrow \sphericalangle A_8ON = \sphericalangle NOA_9 = \frac{\sphericalangle A_8OA_9}{2} = \frac{24^o}{2} = 12^o$ 3p

$\sphericalangle MON = \sphericalangle MOA_5 + \sphericalangle A_5OA_6 + \sphericalangle A_6OA_7 + \sphericalangle A_7OA_8 + \sphericalangle A_8ON$ 2p

$\sphericalangle MON = 10^o + 21^o + 22^o + 23^o + 12^o = 88^o$ 2p

Notă:

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător .