



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – CONSTANȚA, 08.02.2020

Clasa a VII-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL I

- a) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\sqrt{(2x-3)^2} + 4 \cdot |3-2x| = 35$.
- b) Determinați numerele naturale nenule a, b, c , astfel încât $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c} = 2$ și $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 1$.

Soluție:

- a) $\sqrt{(2x-3)^2} = |2x-3|$ 1p
 $|2x-3| = |3-2x|$ 1p
 $5 \cdot |2x-3| = 35 \Rightarrow |2x-3| = 7$ 1p
 $x \in \{-2, 5\}$ 1p
- b) $a\sqrt{3} + b = 2b\sqrt{3} + 2c \Rightarrow b - 2c = \sqrt{3}(2b - a) \Rightarrow b - 2c \in \mathbf{Z}, 2b - a \in \mathbf{Z}$ 1p
 $\sqrt{3}(2b - a) \in \mathbf{Z} \Rightarrow 2b - a = 0$ și $b - 2c = 0 \Rightarrow 2b = a; b = 2c \Rightarrow a = 4c$ 1p
 $\frac{1}{a} + \frac{2}{a} + \frac{4}{a} \geq 1 \Rightarrow \frac{7}{a} \geq 1 \Rightarrow a \leq 7 \Rightarrow 4c \leq 7 \Rightarrow c = 1; b = 2; a = 4$ 1p

SUBIECTUL II

- a) Fie n un număr natural nenul. Arătați că

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{6}} + \frac{1}{7\sqrt{12}} + \dots + \frac{1}{(2n+1)\sqrt{n(n+1)}} < \frac{n}{2n+2}.$$
- b) Determinați numerele prime $p \leq q \leq r$ pentru care $p^4 + q^4 + r^4 = 29811$.

Soluție:

- a) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \rightarrow \frac{1}{(a+b)\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2ab}$ (cu egalitate pentru $a=b$) 1p

$$\frac{1}{(2n+1)\sqrt{n(n+1)}} < \frac{1}{2n(n+1)}$$
 1p

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{6}} + \frac{1}{7\sqrt{12}} + \dots + \frac{1}{(2n+1)\sqrt{n(n+1)}} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$
 1p

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \frac{n}{2n+2}$$
 1p
- b) Unul dintre numere este impar $\rightarrow p = q = 2$ nu avem soluție 1p
 Trei numere impare $\rightarrow p^4, q^4, r^4$ au ultima cifră 1 sau 5 1p
 Finalizare: $p = q = 5, r = 13$ 1p

SUBIECTUL III

Fie G centrul de greutate al triunghiului oarecare ABC , E simetricul punctului G față de dreapta BC , F mijlocul segmentului AE , $\{H\} = GE \cap BC$ și D mijlocul laturii BC .

- Arătați că G, D, H, F sunt vârfurile unui paralelogram.
- Calculați aria triunghiului FGE în funcție de x , unde x este aria paralelogramului de la punctul a).

Soluție:

G.M.

- FH – linie mijlocie în $\triangle AEG \Rightarrow FH \parallel GA$ și $FH = \frac{GA}{2}$ 2p
 G – centrul de greutate al $\triangle ABC \Rightarrow GD = \frac{GA}{2}$ 1p
 $FH \parallel GD$ și $FH = GD \Rightarrow GDHF$ paralelogram 1p
- $\triangle GFH \equiv \triangle HGD \Rightarrow A_{GHD} = A_{HFG} = \frac{A_{GDHF}}{2} = \frac{x}{2}$ 1p
În $\triangle FGE$: FH - mediană $\Rightarrow A_{FGE} = 2A_{HFG} = x$ 2p

SUBIECTUL IV

Fie trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $AD = DC = BC$. Pe diagonala BD e la punctul E astfel încât triunghiul ADE este echilateral. Notăm cu F intersecția dreptelor AB și CE .

- Aflați măsurile unghiurilor trapezului.
- Demonstrați că E este centrul cercului înscris în triunghiul ABC .
- Arătați că triunghiul BEF este isoscel.

Soluție:

- $\triangle ADE$ - echilateral $\Rightarrow \sphericalangle EDA = \sphericalangle DAE = 60^\circ$ 1p
 $\triangle BCD$ – isoscel $\Rightarrow \sphericalangle CDB = \sphericalangle CBD = x$, $\sphericalangle CDB = \sphericalangle ABD = x$ (alt. int.) $\Rightarrow$
 $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAD = 2x$ 1p
 $\Rightarrow \sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ \Rightarrow 2x + 60^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$
 $\Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle B = 80^\circ$, $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 100^\circ$ 1p
- $\sphericalangle CAB = 40^\circ$, $\sphericalangle DAE = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle CAE = 20^\circ$, $\sphericalangle EAF = 20^\circ$ 1p
 AE, BE – bisectoare $\Rightarrow E$ este centrul cercului înscris în triunghiul ABC 1p
- $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, CE – bisectoarea $\sphericalangle ACB \Rightarrow \sphericalangle FCB = 30^\circ$ 1p
 $\sphericalangle CFB = 180^\circ - (80^\circ + 30^\circ) = 70^\circ \Rightarrow \sphericalangle FEB = 70^\circ \Rightarrow \triangle BEF$ isoscel 1p