INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
8 februarie 2020

Clasa a VII-a

1.a) Calculați partea întreagă și partea fracționară a numărului $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$.

b) Dacă $A=\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{8+2\sqrt{7}}}}}}-1$,

arătați că A^2 este număr natural.

Nicolae Ivășchescu

2. Determinaţi numerele reale *x* şi *y* care verifică egalitatea:

$$\sqrt{4x+4y-1}+\sqrt{2-4x}+5\sqrt{26-4y}=27.$$

Gabriel Tica

3. Se consideră un triunghi *ABC* și punctele *M* pe latura *AB*, *N* pe latura *AC*. Dacă triunghiul *AMN* este echilateral și *MB*=*AC*, arătați că triunghiul *BNC* este isoscel.

Dan Nedeianu, Gazeta Matematică nr. 9/2019

4. Laturile opuse *AB* și *CD* ale patrulaterului convex *ABCD* se intersectează în *E*, iar laturile *AD* și *BC* se intersectează în *F*. Se prelungesc segmentele *AE*, *DE*, *BF*, respectiv *AF* cu segmentele *EH*=*AB*, *EK*=*CD*, *FL*=*BC*, respectiv *FM*=*DA*, astfel încât $AH\cap DK=\{E\}, AM\cap BL=\{F\}$. Arătați că *HKLM* este paralelogram.

(***)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

Soluţii clasa a VII-a

1.a) Folosind formula radicalilor dubli obținem că $\sqrt{8+2\sqrt{7}} = \sqrt{7}+1$.

Deoarece $2 < \sqrt{7} < 3$, rezultă că $3 < \sqrt{7}+1 < 4$, de unde obținem că $\left[\sqrt{7}+1\right] = 3$.

$\left\{\sqrt{7}+1\right\} = \sqrt{7}+1-3 = \sqrt{7}-2$.

b) Din punctul a) , înlocuind în penultimul radical $\sqrt{8+2\sqrt{7}} = \sqrt{7}+1$, obținem:

$\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{8+2\sqrt{7}}}=\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{7}+1} = \sqrt{8+2\sqrt{7}} = \sqrt{7}+1$.

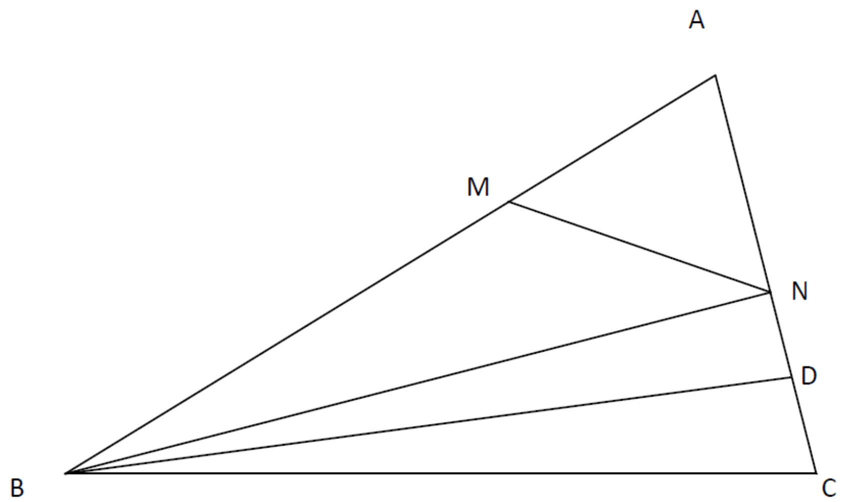
Aplicăm succesiv acest rezultat pentru fiecare radical și obținem că $A = \sqrt{7}+1-1$.

Deci, $A = \sqrt{7}$. Rezultă că $A^2 = 7 \in \mathbb{N}$.

2. Din condiţiile de existenţă rezultă $x + y \geq \frac{1}{4},\ x \leq \frac{1}{2}$ şi $y \leq \frac{13}{2}$.

Notăm $a = \sqrt{x+y-\frac{1}{4}}, b = \sqrt{2-4x}$ şi $c = \sqrt{26-4y}$. Atunci se obține sistemul $2a + b + 5c = 27$ şi $4a^2 + b^2 + c^2 = 27$. De aici rezultă $4a^2 + b^2 + c^2 - 4a - 2b - 10c = -27 \Leftrightarrow (2a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-5)^2 = 0$. Rezultă $x = y = \frac{1}{4}$.

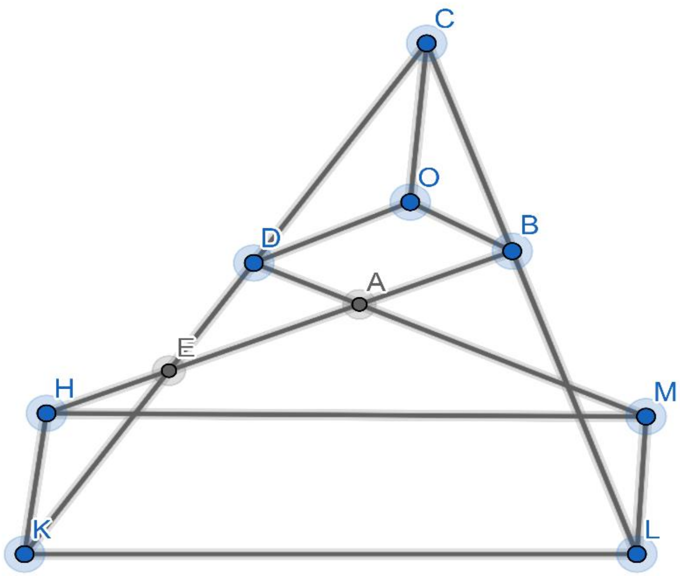
3.



Construim $BD \perp AC$. Deoarece ΔAMN este echilateral rezultă că $m(\angle A) = 60^o$.
Cum ΔBDA este dreptunghic în D obținem că $m(\angle ABD) = 30^o$. Rezultă că $AD = \frac{AB}{2}$.
Dacă notăm $AC = BM = x$ și $AM = AN = MN = y$, atunci $AD = \frac{x+y}{2}$ (1).
Rezultă că $DN = AD - AN = \frac{x-y}{2}$.
Cum $CN = CA - AN = x - y$, se obține că $DN = \frac{CN}{2}$, adică D este mijlocul segmentului *CN*.

Cum $BD \perp AC$, rezultă că *BD* este mediatoarea segmentului *CN*, adică ΔBNC este isocel.

4.



Construim paralelogramul *ABOD*. Se arată că $\Delta EHK \equiv \Delta DOC$ $(L.U.L)$.
Rezultă că *HK*=*CO* și $\sphericalangle HKE \equiv \sphericalangle DCO$(alterne interne), ceea ce înseamnă că $HK \parallel CO$.
Din $\Delta FLM \equiv \Delta BCO$ $(L.U.L)$, se obține că *ML*=*CO* și $ML \parallel CO$.
Deci, *ML*=*HK* și $ML \parallel HK$, ceea ce înseamnă că *HKLM* este paralelogram.

BAREM DE CORECTARE

Clasa a VII-a

Problema 1	
a) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}=\sqrt{7}+1$ $3<\sqrt{7}+1<4$ $\{\sqrt{7}+1\}=\sqrt{7}+1-3=\sqrt{7}-2$	1p 1p 1p
b) $\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{8+2\sqrt{7}}}=\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{7}+1}=\sqrt{8+2\sqrt{7}}=\sqrt{7}+1.$ Aplicăm succesiv acest rezultat pentru fiecare radical. Rezultă $A=\sqrt{7}$ și $A^2=7$.	2p 1p 1p
TOTAL	**7p**
Problema 2	
Notăm $a=\sqrt{x+y-\frac{1}{4}}, b=\sqrt{2-4x}$ şi $c=\sqrt{26-4y}$ $2a+b+5c=27$ $4a^2+b^2+c^2=27$ $(2a-1)^2+(b-1)^2+(c-5)^2=0.$ $\Rightarrow x=y=\frac{1}{4}$	1p 1p 2p 2p 1p
TOTAL	**7p**
Problema 3	
Construim $BD\perp AC$ $m(\angle ABD)=30^o$ $AD=\frac{AB}{2}$ Notăm $AC=BM=x$ şi $AM=AN=MN=y, AD=\frac{x+y}{2}$ $DN=AD-AN=\frac{x-y}{2}$ $DN=\frac{CN}{2}$, adică D este mijlocul segmentului CN *BD* este mediatoarea segmentului *CN*, adică ΔBNC este isocel	1p 1p 1p 1p 1p 1p 1p
TOTAL	**7p**
Problema 4	
Construim paralelogramul *ABOD* $\Delta EHK\equiv\Delta DOC\ (L.U.L)$ *HK=CO*, $HK\parallel CO$ *ML=CO* și $ML\parallel CO$ *ML=HK* și $ML\parallel HK$ *HKLM* este paralelogram	2p 1p 1p 1p 1p 1p
TOTAL	**7p**