Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa II - 20 martie 2021

Timp de lucru 120 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeţi varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

Tip I

1. Considerăm x soluţia ecuaţiei

$$\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x}{2\cdot 3}+\frac{x}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{x}{2020\cdot 2021}=\frac{2020}{43}.$$

Suma cifrelor lui x este:

A 5 **B** 8 **C** 11 **D** 12 **E** 21

Răspuns **C**

2. Fie x şi y numere reale care satisfac ecuaţia $5x^2+y^2+20=2x+3xy+6y$. Atunci $x+y$ este egal cu:

A 5 **B** 8 **C** 9 **D** 14 **E** 16

Răspuns **B**

3. Notăm cu $[x]$ partea întreagă a numărului x. Mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R}\mid [x]^2-5[x]+6=0\}$ este egală cu:

A $[2,4]$ **B** $(2,4)$ **C** $(2,3)\cup(3,4)$ **D** $[2,3)\cup(3,4)$ **E** $[2,4)$

Răspuns **E**

4. Dacă $a,b\in\mathbb{N}$ astfel încât $a+b=101$, iar valoarea sumei $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ este maximă, atunci $a\cdot b$ este egal cu:

A 1050 **B** 2500 **C** 2000 **D** 2550 **E** 1010

Răspuns **D**

5. Numărul elementelor mulţimii $M=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid x^4+x^2+1=2^y\}$ este:

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 4 **E** 8

Răspuns **B**

6. Fie $VABC$ un tetraedru regulat de muchie $l=\sqrt{3}+\sqrt{6}-3$, M mijlocul segmentului BC, $VO\perp(ABC)$, $O\in(ABC)$ şi P mijlocul segmentului VO. Perimetrul triunghiului APM este egal cu:

A $\sqrt{6}$ **B** $\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{6}-3)}{3}$ **C** $\sqrt{3}+\sqrt{6}+3$ **D** $\sqrt{2}$ **E** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}+3}{2}$

Răspuns : **A**

7. În tetraedrul regulat $ABCD$ notăm cu A_1, B_1, C_1 şi D_1 centrele de greutate ale feţelor BCD, ACD, ABD, respectiv ABC. Atunci măsura unghiului dintre dreptele A_1C_1 şi B_1D_1 este:

A 0° **B** 60° **C** 90° **D** 30° **E** 75°

Răspuns : **C**

8. Pentru $n\in\mathbb{N}$, definim $A_n=\{x\in\mathbb{R}\mid |x+n+4|\leq 3n-4\}$. Numărul natural n pentru care mulţimea A_n conţine exact 323 numere întregi este:

A 20 **B** 60 **C** 55 **D** 120 **E** 64

Răspuns : **C**

9. Numărul perechilor (x,y) de numere naturale, care sunt soluţii ale ecuaţiei $2^x-5^y=39$ este:

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

Răspuns : **B**

10. Cel mai mare divizor comun al numerelor $2^{2^{2019}}-1$ şi $2^{2^{2021}}-4$ este:

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 2021 **E** 2^{2021}

Răspuns : **C**

11. Se consideră un plan α, o dreaptă $d \parallel \alpha$, cinci puncte A, B, C, D, E, oricare 3 necoliniare, situate în planul α şi punctele $P_1, P_2, \ldots, P_{20}$, distincte două câte două, situate pe d. Care este numărul maxim de plane distincte determinate de câte trei dintre cele 25 de puncte, exceptând planul α?

A 1150 **B** 205 **C** 206 **D** 201 **E** 200

Răspuns : **B**

12. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic şi H ortocentrul triunghiului $A'BD$. Valoarea expresiei $\sin^2 \widehat{HAB} + \sin^2 \widehat{HAD} + \sin^2 \widehat{HAA'}$ este:

A 0 **B** $\frac{1}{2}$ **C** 1 **D** $\frac{3}{2}$ **E** 2

Răspuns : **E**

13. Dacă $x > 0$ este număr real şi $x + \frac{1}{x} \leq 7$, atunci valoarea maximă a expresiei $x^2 - \frac{1}{x^2}$ este:

A $7\sqrt{5}$ **B** 45 **C** $21\sqrt{5}$ **D** 47 **E** 0

Răspuns : **C**

14. Fie $A = \left\{\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \ldots, \frac{1}{2021\cdot 2022}\right\}$ şi $B = \left\{\frac{1}{2\cdot 4}, \frac{1}{3\cdot 5}, \frac{1}{4\cdot 6}, \ldots, \frac{1}{2020\cdot 2022}\right\}$. Cardinalul mulţimii $A \cup B$ este:

A 0 **B** 2020 **C** 2021 **D** 4039 **E** 4040

Răspuns : **E**

15. Suma a trei numere raţionale strict pozitive x, y, z este 3, iar suma inverselor lor este 5. Ştiind că unul dintre numere este întreg, atunci numărul tripletelor (x, y, z) ce satisfac condiţiile de mai sus este:

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 6

Răspuns : **E**

16. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$, astfel încât $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{bc}}$. Fie u unghiul dreptei BD' cu planul (ACC'). Atunci sinusul unghiului u este egal cu:

A 0 **B** $\frac{1}{2}$ **C** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **E** $\frac{1}{3}$

Răspuns : **D**

17. Notăm partea fracţionară a numărului x cu $\{x\}$. Suma soluţiilor ecuaţiei $25\{x\}^2 - 10x + 1 = 0$ este:

A $\frac{1}{5}$ **B** $\frac{6+\sqrt{5}}{5}$ **C** $\frac{7+\sqrt{5}}{5}$ **D** $\frac{18+3\sqrt{5}}{5}$ **E** 3

Răspuns : **C**

18. Dacă n este număr natural, notăm cu a_n numărul întregilor din intervalul $[n\sqrt{2}, n\sqrt{3}]$. Cel mai mic element al mulţimii $\{a_n \mid n \geq 7\}$ este

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

Răspuns : **C**

19. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB = 40$ cm şi $AC = 30$ cm. Pe planul (ABC) se ridică perpendicularele AA' şi CC', de aceeaşi parte a planului, astfel încât $AA' = AB$ şi $CC' = \frac{5}{4}BC$. Tangenta unghiului planelor (ABC) şi $(A'BC')$ este egală cu:

A $\frac{5}{4}$ **B** $\frac{3}{2}$ **C** $\frac{4}{3}$ **D** $\frac{6}{5}$ **E** $\frac{7}{6}$

Răspuns : **A**

20. Pe un cerc sunt dispuse 2014 numere reale, fiecare având modulul 1. Se face suma celor 2014 produse de câte patru numere dispuse consecutiv pe cerc. Atunci suma poate fi:

A -100 **B** 1606 **C** 2018 **D** -8 **E** -51

Răspuns : **B**

21. Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, \ldots, 2021\}$. Numărul maxim de submulţimi ale lui A ce pot fi alese, astfel încât intersecţia oricăror două submulţimi distincte să aibă exact 2019 elemente este:

A 3 **B** 4042 **C** 2019 **D** 1011 **E** 2021

Răspuns : **E**

22. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu muchia bazei $AB = 2\sqrt{3}$ cm şi înălţimea $AA' = 1$ cm. Dacă M este un punct din planul triunghiului $A'B'C'$, atunci valoarea minimă a sumei pătratelor distanţelor de la M la dreptele AB, AC şi BC este:

A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 12

Răspuns : **C**

23. Fie a un număr natural şi $A(a) = \{\sqrt{a^2+1}, \sqrt{a^2+2}, \sqrt{a^2+3}, \ldots, \sqrt{a^2+29a+201}\}$. Valoarea lui a pentru care suma elementelor mulţimii $A(a) \cap \mathbb{N}$ este 203 este:

A 2 **B** 5 **C** 7 **D** 9 **E** 11

Răspuns : **C**

24. Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră punctele D şi E astfel încât $BD = DE = EC$. Fie M mijlocul segmentului AD, $BM \cap AE = \{P\}$, $CM \cap AE = \{Q\}$. Se construiesc RM şi TD perpendiculare pe planul (ABC), de aceeaşi parte a acestuia, astfel încât $TD = 2RM$. Raportul dintre aria triunghiului PRQ şi aria triunghiului ETA are valoarea:

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{1}{4}$ **D** $\frac{2}{3}$ **E** $\frac{1}{6}$

Răspuns : **E**