Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 1 februarie 2020
Clasa a VIII – a

8

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1- Soluție orientativă:		**Punctaj**
a)	$a^2+b^2\ge 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$ - adevărat.	**2p**
b)	Folosind a) $\Rightarrow 2x^2+y^2\ge 2\sqrt{2}xy$ şi $x^2+2z^2\ge 2\sqrt{2}xz$, de unde $\frac{2x}{(2x^2+y^2)(x^2+2z^2)}\le\frac{2x}{2\sqrt{2}xy\cdot 2\sqrt{2}xz}=\frac{1}{4xyz}=\frac{1}{24}$	**3p**
	Analog, $\frac{3y}{(3y^2+z^2)(y^2+3x^2)}\le\frac{1}{24}$ şi $\frac{5z}{(5z^2+x^2)(z^2+5y^2)}\le\frac{1}{24}$	**1p**
	Adunând cele trei relații se obţine inegalitatea din enunț.	**1p**

Problema 2- Soluție orientativă:	**Punctaj**
Relația din enunț este echivalentă cu $x^2-2020+2xy\sqrt{2018}+2018y^2=2019z^2$	**2p**
$\left(x+\sqrt{2018}y\right)^2-\left(\sqrt{2019}z\right)^2=2020$	**2p**
$\left(x+\sqrt{2018}y+\sqrt{2019}z\right)\left(x+\sqrt{2018}y-\sqrt{2019}z\right)=2020$	**2p**
$x+\sqrt{2018}y-\sqrt{2019}z=2$ - număr prim.	**1p**

Problema 3- Soluție orientativă:		**Punctaj**
a)	În planul (CBB') se construieşte $B'D \parallel BC'$, $D\in BC$, $AB'\perp BC' \Rightarrow AB'\perp B'D \Rightarrow m(\sphericalangle AB'D)=90^0$	**2p**
	$BDB'C'$ - paralelogram $\Rightarrow [B'D]\equiv[BC']$, dar $\Rightarrow [BC']\equiv[AB'] \Rightarrow [B'D]\equiv[AB'] \Rightarrow \Delta AB'D$ - isoscel şi $BD=B'C'=a \Rightarrow BD=AB=a \Rightarrow \Delta ABD$ - isoscel.	**1p**
	$m(\sphericalangle ABD)=120^0 \Rightarrow m(\sphericalangle BAD)=30^0 \Rightarrow m(\sphericalangle CAD)=90^0 \Rightarrow \Delta CAD$ - dreptunghic, aplicând teorema lui Pitagora $\Rightarrow AD=a\sqrt{3}$, iar în $\Delta AB'D$ - dreptunghic isoscel $\Rightarrow AB'=\frac{a\sqrt{6}}{2}$, pentru ca apoi, utilizând teorema lui Pitagora în $\Delta ABB' \Rightarrow BB'=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.	**1p**
b)	Cum $[MB]$ - mediană în $\Delta ABC - echilateral \Rightarrow MB\perp AC$, $CC'\perp(ABC)\xrightarrow{r.1t.c.t.p.} C'M\perp BM$	**1p**
	$m(\sphericalangle((BMC'),(ABC)))=m(\sphericalangle C'MC)$ şi $tg(\sphericalangle C'MC)=\frac{CC'}{CM}=\frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}}=\sqrt{2}$	**2p**

Problema 4- Soluție orientativă:	**Punctaj**
Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, are loc: $a_k = \sqrt{2k+1+2\sqrt{k(k+1)}} = \sqrt{k+k+1+2\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}} = \sqrt{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})^2} = \sqrt{k+1}+\sqrt{k}$	**2p**
Pentru $k \in \{1,2,...,n\} \Rightarrow$ $AA' = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$ $= (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + ... + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n+1}-1$	**1p**
Din: AD // BC şi AA' // BB' $\Rightarrow$ (ADA') // (BCB') , (ADA') $\cap$ (A'B'C') = A'D, (BCB') $\cap$ (A'B'C') = B'C' $\Rightarrow$ A'D // B'C' (1) ; analog se obţine că A'B' // DC' (2). Din (1) şi (2) rezultă că A'B'C'D este paralelogram.	**2p**
Fie DB $\cap$ AC = {O} şi DB' $\cap$ A'C' = {O'} $\Rightarrow$ [OO'] este linie mijlocie în trapezul AA'C'C, respectiv în ΔBDB' $\Rightarrow$ OO' = $\frac{AA'+CC'}{2} = \frac{BB'}{2}$, înlocuind cu lungimile segmentelor se obţine ecuaţia: $(\sqrt{n+1}-1)+1=\sqrt{2021} \Rightarrow n=2020$.	**2p**

Notă:
Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.
Se acordă numai punctaje întregi.