

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
08.02.2020**

CLASA a VIII-a

Subiectul I

a) Demonstrați că $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$

b) Determinați numerele reale x, y, z pentru care: $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} + 3\sqrt{z-9} = \frac{x+y+z}{2}$.

Subiectul II

a) Fie $n \in \mathbb{N}$. Demonstrați că $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă n este pătrat perfect.

b) Determinați numerele naturale n pentru care $\sqrt{n^2 + 8n + 51}$ este număr rațional.

Subiectul III

Pe planul pătratului ABCD se construiește perpendiculara SA, astfel încât $SA = AB = a$.

a) Arătați că $BD \perp SC$.

b) Calculați distanța dintre dreptele BD și SC.

c) Dacă M este mijlocul laturii CD, determinați distanța de la punctul S la dreapta BM.

Subiectul IV

În prisma patrulateră regulată ABCD A'B'C'D', se consideră punctele E, F, respectiv F', mijloacele muchiilor [AB], [BC], respectiv [B'C']. Muchia bazei este de 6 cm, iar înălțimea AA' = 9 cm.

a) Demonstrați că $AF \perp DE$.

b) Calculați tangenta unghiului diedru determinat de planele (F'DE) și (ABC).

c) Fie punctul P situat pe muchia [BB']. Calculați lungimea segmentului BP, știind că perimetrul $\triangle A'PF$ este minim.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.