

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 8 februarie 2020****Clasa a VIII-a
Barem de corectare și notare**

1) Determinați numerele reale a, b, c dacă $a+b+c=1$ și $ab+bc+ca \geq \frac{1}{3}$

Soluție:

$$ab+bc+ca - \frac{a+b+c}{3} \geq 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$a\left(b - \frac{1}{3}\right) + b\left(c - \frac{1}{3}\right) + c\left(a - \frac{1}{3}\right) \geq 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$a\left(\frac{3b-a-b-c}{3}\right) + b\left(\frac{3c-a-b-c}{3}\right) + c\left(\frac{3a-a-b-c}{3}\right) \geq 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$-a^2 - b^2 - c^2 + ab + ac + bc \geq 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \leq 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leq 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow a=b=c=\frac{1}{3} \dots\dots\dots 1p$$

2) Arătați că:

a) numărul A este rațional, unde $A = \sqrt{\left(\frac{1}{7-4\sqrt{3}} + \frac{1}{7+4\sqrt{3}}\right)} : \frac{2}{7}$;

b) numărul B este irațional, unde $B = \sqrt{\left[\frac{(7+4\sqrt{3})^n}{4} + \frac{6}{(7-4\sqrt{3})^n}\right]} : \frac{(7-4\sqrt{3})^n}{2}$.

Soluție:

$$a) A = \sqrt{\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} + \frac{7-4\sqrt{3}}{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}\right)} : \frac{7}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}}{49-48}\right)} : \frac{7}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{obținem } A = \sqrt{\frac{14 \cdot 7}{2}} = 7 \in \mathbb{Q} \dots\dots\dots 1p$$

$$b) B = \sqrt{\left[\frac{(7+4\sqrt{3})^n}{4} + \frac{6(7+4\sqrt{3})^n}{(49-48)^n} \right] \cdot \frac{2}{(7-4\sqrt{3})^n}} \dots\dots\dots 1p$$

$$B = \sqrt{\left[\frac{(7+4\sqrt{3})^n}{4} + \frac{4 \cdot 6(7+4\sqrt{3})^n}{4} \right] \cdot \frac{2(7+4\sqrt{3})^n}{(49-48)^n}} \dots\dots\dots 1p$$

$$B = \sqrt{\frac{(7+4\sqrt{3})^n \cdot 25 \cdot 2(7+4\sqrt{3})^n}{4}} \dots\dots\dots 1p$$

obținem $B = (7+4\sqrt{3})^n \cdot \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ 1p

3) Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $AB = 30$ cm, $AC = 40$ cm. În punctul A se ridică perpendiculara AM pe planul (ABC) , $AM = 24$ cm.

- a) Determinați măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (MBC) și (ABC) .
 b) Arătați că piciorul perpendicularei din A pe planul (MBC) este ortocentrul triunghiului MBC .

Soluție:

- a) fie $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, justificare $MD \perp BC$ (aplică corect T celor 3 \perp) 1p
 justificare unghiul căutat este $\sphericalangle MDA$ 1p
 calcul $AD = 24$ cm 1p
 $\Rightarrow m(\sphericalangle MDA) = 45^\circ$ 1p
 b) fie $H \in (MD)$, astfel încât $AH \perp MD \Rightarrow AH \perp (MBC)$ 1p
 $AC \perp (MBA)$ 1p
 $\Rightarrow CH \perp MD$, deci H ortocentrul triunghiului MBC 1p

4) Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ și $DO \perp (ABC)$. Dacă $M \in (DO)$ astfel încât $MA \perp MB$, arătați că M este mijlocul lui (OD) .

Soluție:

- a) desen 1p
 ΔMOA și ΔMOB dreptunghice în O – justificare 1p
 fie a muchia tetraedrului și x lungimea lui $[MO] \Rightarrow AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ 1p



$$MA^2 = x^2 + \frac{a^2}{3}, MB^2 = x^2 + \frac{a^2}{3} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Delta MAB \text{ dreptunghic în } M \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{6} = MO \dots\dots\dots 1p$$

$$DO = \frac{a\sqrt{6}}{3} \dots\dots\dots 1p$$

$$2 \cdot MO = \frac{a\sqrt{6}}{3} = DO \Rightarrow M \text{ este mijlocul lui } (OD) \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct.
- Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.