OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2020

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL I (7 p)

a) Se dă expresia $E(x)=\left(\dfrac{2x}{x^2-2x}-\dfrac{4x+12}{x^3+3x^2-4x-12}+\dfrac{x^2}{x^2+2x}\right)\cdot\left(x-\dfrac{4}{x}\right)$,

unde $x\in\mathbf{R}\setminus\{-3;-2;0;2\}$.

Arătați că suma $E(1)+E(3)+E(5)+\ldots+E(2021)$ este pătrat perfect.

b) Arătați că $\left(\dfrac{\sqrt{37}+1}{6}\right)^{2020}+\left(\dfrac{\sqrt{37}-1}{6}\right)^{2020}>2.$

SUBIECTUL II (7 p)

Arătați că dacă $5a^2+5b^2-2a-12b+\dfrac{28}{5}=0$, unde $a,b\in\mathbf{R}$, atunci $a+b\in\left[\dfrac{1}{5};\,2\dfrac{3}{5}\right]$.

SUBIECTUL III (7 p)

Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, cu $AB = AA' = 12$ cm.

a) Determinați poziția punctului E pe muchia $[AA']$, știind că distanța de la punctul A la planul (EBC) este egală cu $3\sqrt{3}$ cm.

b) Aflați sinusul unghiului dintre dreptele AP și $A'N$, unde N și P sunt mijloacele muchiilor $[BB']$, respectiv $[CC']$.

SUBIECTUL IV (7 p)

Fie tetraedrul $ABCD$, în care $AB\perp CD$. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor $[BC]$, respectiv $[BD]$. Pe semidreapta $(DM$ alegem punctul E, astfel încât $DE = 2DM$, iar pe semidreapta $(CN$ alegem punctul F astfel încât $CF = 2CN$.

a) Demonstrați că dreapta CD este paralelă cu planul (AEF).

b) Demonstrați că triunghiul AEF este isoscel.

NOTĂ: Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii.