OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2020

BAREM

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL I (7 p)

a) Se dă expresia $E(x)=\left(\frac{2x}{x^2-2x}-\frac{4x+12}{x^3+3x^2-4x-12}+\frac{x^2}{x^2+2x}\right)\cdot\left(x-\frac{4}{x}\right)$, unde $x\in\mathbf{R}\setminus\{-3;-2;0;2\}$

Arătați că suma $E(1)+E(3)+E(5)+\ldots+E(2021)$ este pătrat perfect.

b) Arătați că $\left(\frac{\sqrt{37}+1}{6}\right)^{2020}+\left(\frac{\sqrt{37}-1}{6}\right)^{2020}>2.$

Rezolvare:

a) $E(x)=\left(\frac{2x}{x(x-2)}-\frac{4(x+3)}{(x+3)(x+2)(x-2)}+\frac{x^2}{x(x+2)}\right)\cdot\frac{x^2-4}{x}$ …………………………………… 1p

$E(x)=\left(\frac{2}{x-2}-\frac{4}{(x+2)(x-2)}+\frac{x}{x+2}\right)\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{x}$ …………………………………… 1p

$E(x)=x$ …………………………………… 1p

$E(1)+E(3)+E(5)+\ldots+E(2021)=1+3+5+\ldots+2021=1011^2$ este pătrat perfect ………… 1p

b) Observăm că notând $a=\left(\frac{\sqrt{37}+1}{6}\right)^{2020}$ și $b=\left(\frac{\sqrt{37}-1}{6}\right)^{2020}$, avem $a\cdot b=1$ …………………… 1p

Cum $a\neq b$, din inegalitatea mediilor $m_a>m_g\Rightarrow\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}\Rightarrow a+b>2\sqrt{ab}$ …………………… 1p

$a+b>2\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{37}+1}{6}\right)^{2020}+\left(\frac{\sqrt{37}-1}{6}\right)^{2020}>2$ …………………………………… 1p

SUBIECTUL II (7 p)

Arătați că dacă $5a^2+5b^2-2a-12b+\frac{28}{5}=0$, unde $a,b\in\mathbf{R}$, atunci $a+b\in\left[\frac{1}{5};\ 2\frac{3}{5}\right]$.

Rezolvare:

$25a^2+25b^2-10a-60b+28=0$ …………………………………… 1p

$(5a-1)^2+(5b-6)^2-9=0$ …………………………………… 1p

$(5a-1)^2\leq 9$ și $(5b-6)^2\leq 9$ …………………………………… 1p

$-3\leq 5a-1\leq 3$ și $-3\leq 5b-6\leq 3$ …………………………………… 1p

$-6\leq 5a+5b-7\leq 6$ …………………………………… 1p

$1\leq 5(a+b)\leq 13$ …………………………………… 1p

$\frac{1}{5}\leq a+b\leq\frac{13}{5}\Rightarrow a+b\in\left[\frac{1}{5};\ 2\frac{3}{5}\right]$ …………………………………… 1p

SUBIECTUL III (7 p)

Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, cu $AB = AA' = 12$ cm.

a) Determinați poziția punctului E pe muchia $[AA']$, știind că distanța de la punctul A la planul (EBC) este egală cu $3\sqrt{3}$ cm;

b) Aflați sinusul unghiului dintre dreptele AP și $A'N$, unde N și P sunt mijloacele muchiilor $[BB']$, respectiv $[CC']$.

Rezolvare:

a) Fie D mijlocul muchiei $[BC] \overset{T3\perp}{\Rightarrow} ED \perp BC$

Fie $AF \perp ED$, $F \in (ED) \overset{RT3\perp}{\Rightarrow} AF \perp (EBC) \Rightarrow d(A, (EBC)) = AF = 3\sqrt{3}$ cm 1p

ΔEAD dr., $AF = 3\sqrt{3}$ cm, $AD = 6\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow AE = 6$ cm $\Rightarrow E$ este mijlocul muchiei $[AA']$ 2p

b) Fie M mijlocul muchiei AA'.

Din $MC' \parallel AP$, $MB \parallel A'N \Rightarrow sin(\sphericalangle (AP, A'N)) = sin(\sphericalangle (MC', MB)) = sin(\sphericalangle C'MB)$ 1p

$MC' = 6\sqrt{5}$ cm , $MB = 6\sqrt{5}$ cm, $C'B = 12\sqrt{2}$ cm 1p

$6\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5} \cdot sin(\sphericalangle C'MB) = 12\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{3}$ 1p

$sin(\sphericalangle C'MB) = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ 1p

SUBIECTUL IV (7 p)

Fie tetraedrul $ABCD$, în care $AB \perp CD$. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor $[BC]$, respectiv $[BD]$. Pe semidreapta $(DM$ alegem punctul E, astfel încât $DE = 2DM$, iar pe semidreapta $(CN$ alegem punctul F astfel încât $CF = 2CN$.

a) Demonstrați că dreapta CD este paralelă cu planul (AEF).

b) Demonstrați că triunghiul AEF este isoscel.

Rezolvare:

a) Patrulaterele $CDFB$ şi $CDBE$ sunt paralelograme 2p

BF şi BE sunt paralele cu $DC \overset{ax.\ Euclid}{\Rightarrow} F, B, E$ sunt coliniare 1p

$CD \parallel (AEF)$ 1p

b) B este mijlocul lui $[EF]$ 1p

$AB \perp CD$ și $CD \parallel FB \Rightarrow AB \perp FB \Rightarrow AB \perp EF$ 1p

În ΔAEF, $[AB]$ este mediană și înălțime $\Rightarrow \Delta AEF$ isoscel 1p