OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 2.02.2019
CLASA a VIII-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor Cristian Olteanu

a) Arătați că $\dfrac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$, unde $n \in \boldsymbol{N}^*$

b) Aflați $n \in \boldsymbol{N}^*$ astfel încât $1+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1\cdot 3}}}+\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2\cdot 4}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{3\cdot 5}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{(n-1)\cdot(n+1)}}}=$

$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2020}+\sqrt{2018}}+\frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2017}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2018}-\sqrt{2017}}-1\right)$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Ridicând la pătrat, obținem $\dfrac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)^2 \Leftrightarrow$	1p
$n-\sqrt{n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(n+1+n-1-2\sqrt{(n+1)(n-1)}\right) \Leftrightarrow n-\sqrt{n^2-1}=n-\sqrt{n^2-1}$	2p
b) Aplicând a) obținem $1+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1\cdot 3}}}+\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2\cdot 4}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{3\cdot 5}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{(n-1)\cdot(n+1)}}}=$ $1+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{1})+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{4}-\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=$ $1+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}-\sqrt{1})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-1)$	2p
$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2020}+\sqrt{2018}}+\frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2017}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2018}-\sqrt{2017}}-1\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2020}+\sqrt{2019}-1)$	1p
Obținem $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\sqrt{2020}+\sqrt{2019} \Rightarrow n=2019$	1p

Enunț subiect 2, autor Traian Preda

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, M și N mijloacele muchiilor AA', respectiv $C'D'$, iar O și O' centrele fețelor $BCC'B'$, respectiv $ADD'A'$.

a) Demonstrați că $NO' \perp (B'CD')$

b) Determinați sinusul unghiului dintre dreptele MO și NO'.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) NO' linie mijlocie în $\Delta AC'D' \Rightarrow NO' \parallel AC'$	1p
$ACB'D'$ tetraedru regulat $\Rightarrow AG \perp (B'CD')$, unde G centrul triunghiului $B'CD'$ $C'CB'D'$ piramidă triunghiulară regulată $\Rightarrow C'G \perp (B'CD')$	1p
$\Rightarrow AC' \perp (B'CD')$. Cum $NO' \parallel AC' \Rightarrow NO' \perp (B'CD')$	1p

b) Fie P mijlocul segmentului $CC' \Rightarrow OP\ l.m.$ în $\Delta BCC' \Rightarrow OP \parallel BC$ și $OP = \frac{BC}{2}$ Analog $MO' \parallel AD \parallel BC$ și $MO' = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow MOPO'$paralelogram $\Rightarrow$ $MO \parallel O'P \Rightarrow m(\sphericalangle MO, NO') = m(\sphericalangle O'P, NO') = m(\sphericalangle NO'P)$	2p
În $\Delta NO'P, NP = a\sqrt{2}, O'P = a\sqrt{5},$ iar $NO' = a\sqrt{3},$ unde am notat $AB = 2a$	1p
Din reciproca teoremei lui Pitagora obținem $\Delta NO'P$ dreptunghic în N $\Rightarrow \sin(\sphericalangle NO'P) = \frac{NP}{O'P} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$	1p

Obs. La subpunctul b) se poate considera și Q mijlocul segmentului AB

Enunţ subiect 3, autori Mihai Monea, Deva și Mihai Opincariu, Brad, G.M. 11/2019

Se consideră mulțimea $M = \{a^2 + 2b^2 | a, b \in \boldsymbol{N}\}$ și n un număr natural. Dacă $100n \in M$, demonstrați că $99n \in M$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$100n = a^2 + 2b^2 \Rightarrow a^2 \vdots 2 \Rightarrow a \vdots 2 \Rightarrow b^2 \vdots 2 \Rightarrow b \vdots 2$	1p
Un pătrat perfect poate fi de forma $M_5, M_5 + 1$ sau $M_5 + 4$	1p
Cum $a^2 + 2b^2 \vdots 5,$ convine doar $a \vdots 5$ și $b \vdots 5 \Rightarrow a = 10x$ și $\mathrm{b} = 10y \Rightarrow$	1p
$100n = 100x^2 + 200y^2 \Rightarrow n = x^2 + 2y^2 \Rightarrow n \in M$	1p
$9n = (3x)^2 + 2(3y)^2 \Rightarrow 9n \in M$	1p
Dacă notăm $9n = c^2 + 2d^2 \Rightarrow 99n = 11 \cdot 9n = (3^2 + 1^2 + 1^2)(c^2 + d^2 + d^2)$ $= (3c + d + d)^2 + (3c - d)^2 + (3c - d)^2 + (d - d)^2$ (Lagrange) $\Rightarrow$ $99n = (3c + 2d)^2 + 2(3c - d)^2 \Rightarrow 99n \in M$	2p

Obs. Alternativ $99n = (7^2 + 5^2 + 5^2)(x^2 + y^2 + y^2)$, etc.

Enunţ subiect 4, autor Traian Preda

Fie *VABCD* o piramidă cu baza *ABCD* paralelogram. Considerăm punctele *P*,*Q* pe diagonala [*BD*] astfel încât $BQ = DP = \frac{BD}{6}$, *M* mijlocul muchiei [*VD*], iar $N \in (VB)$astfel încât $VN = 3NB$. Demonstrați că:

a) *(MPC)*∥*(AQN)*
b) *RS*∥*(MPC)*, unde *R* și *S* sunt mijloacele segmentelor [*AM*], respectiv [*NC*].

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a)$DP = BQ = a \Rightarrow PQ = 4a.$ Construim $VU \parallel MP \Rightarrow PU = DP = a$	1p
$UQ = 4a - a = 3a \Rightarrow \frac{UQ}{QB} = \frac{VN}{NB} = 3 \xRightarrow{R.T.Thales} NQ \parallel VU \parallel MP$	1p
$AQ \parallel CP$ ($AQCP$ paralelogram) $\Rightarrow (AQN) \parallel (MPC)$	2p
b)Fie $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow RO$ linie mijlocie în $\Delta AMC \Rightarrow RO \parallel MC, MC \subset (MPC)$ $\Rightarrow RO \parallel (MPC)(1)$	1p
OS linie mijlocie în $\Delta ANC \Rightarrow OS \parallel AN, AN \subset (ANC) \Rightarrow OS \parallel (ANC) \parallel (MPC)(2)$	1p
Din (1)și(2) $\Rightarrow (ORS) \parallel (MPC),$ dar $RS \subset (ORS) \Rightarrow RS \parallel (MPC)$	1p