INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: **isjdolj@isjdolj.ro** Web: **www.isjdolj.ro**
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
8 februarie 2020

Clasa a VIII-a

1. Fie mulțimile $A_n = \{x \in \mathbb{R} |\ |x+2n-7| \le 3n+1, n \in \mathbb{N}\}$.
a) Să se scrie sub formă de interval mulțimile A_0 și A_1.
b) Există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât A_n să aibă 4023 de elemente din mulțimea numerelor întregi?

Mirea Mihaela Mioara

2. Dacă x, y, z sunt numere reale astfel încât
$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 20 = 4x + 12y + 24z,$$
arătați că $x \in [-1,5], y \in [0,3]$ și $z \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$

Vasile Scurtu G.M. nr. 12/2019

3. Fie prisma hexagonală $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu muchia bazei $AB = l$ și înălțimea $AA' = l\sqrt{3}$. Notăm cu N mijlocul lui $[CC']$.
a) Demonstrați că dreptele BF' și ND sunt perpendiculare.
b) Aflați distanța dintre BF' și ND, pentru $l = 12$ cm.

(***)

4. Fie S o submulțime a mulțimi $M = \{1, 2, 3, 4, \dots, 2017\}$ astfel încât pentru orice $a, b \in S$ să avem $|a-b| \notin \{4,7\}$. Aflați numărul maxim de elemente pe care îl poate avea submulțimea S.

(***)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte
Timp de lucru: 3 ore

Soluţii

Clasa a VIII-a

1. a) $A_0 = \{x \in \mathbb{R} | |x-7| \leq 1\}$
$|x-7| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-7 \leq 1 \Leftrightarrow 6 \leq x \leq 8 \Leftrightarrow A_0 = [6,8]$
$A_1 = \{x \in \mathbb{R} | |x-5| \leq 4\}$
$|x-5| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x-5 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 9 \Leftrightarrow A_1 = [1,9]$
$b) A_n = \{x \in \mathbb{R} | |x+2n-7| \leq 3n+1, n \in \mathbb{N}\}$
$|x+2n-7| \leq 3n+1 \Leftrightarrow -3n-1 \leq x+2n-7 \leq 3n+1 \Leftrightarrow -5n+6 \leq x \leq n+8 \Leftrightarrow$
$x \in [-5n+6, n+8]$
$card(A_n \cap \mathbb{Z}) = n+8+5n-6+1 = 6n+3$
$6n+3= 4023$, $n = 670$.

2. $x^2+4y^2+9z^2+20 = 4x+12y+24z \Leftrightarrow x^2-4x+4+4y^2-12y+9+9z^2-24z+16 = 9 \Leftrightarrow (x-2)^2+(2y-3)^2+(3z-4)^2 = 9$
$\Rightarrow |x-2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-2 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow x \in [-1,5]$
$\Rightarrow |2y-3| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2y-3 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow y \in [0,3]$
$\Rightarrow |3z-4| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 3z-4 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{7}{3} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$.

3. a) Fie M mijlocul lui BB' $\Rightarrow MN||BC||AD \Rightarrow$ A, D, N, M sunt coplanare. Intersecția dintre planele (BFF') și (ADN) este dreapta MQ, $\{Q\} = AD \cap BF$.
$BF = 2 \cdot BQ = \frac{2l\sqrt{3}}{2} = l\sqrt{3} \Rightarrow BF \equiv BB' \Rightarrow BB'F'F$ pătrat. În pătratul $BB'F'F$ avem $MQ||B'F$. Cum $B'F \perp BF' \Rightarrow MQ \perp BF'$.
$BB' \perp AD, BF \perp AD \Rightarrow AD \perp (B'BF), BF' \subset (B'BF) \Rightarrow AD \perp B'F$.
$BF' \perp MQ, BF' \perp AD \Rightarrow BF' \perp (NAD), ND \subset (NAD) \Rightarrow BF' \perp ND$.
b) Fie $\{T\} = BF' \cap MQ$. Fie $TS \perp ND$. Cum $BF' \perp (NAD) \Rightarrow BF' \perp TS \Rightarrow d(BF', ND)\ TS$ (TS este perpendiculara comună pe cele două drepte). Vom calcula aria triunghiului TND în două moduri.
$A_{TND} = A_{MNDQ} - A_{MNT} - A_{TQD}$
$A_{MNDQ} = \frac{(QD+MN) \cdot MQ}{2}$
$MN = BC = l, QD = AD - AQ = \frac{3l}{2}$
Din teorema lui Pitagora, avem: $MQ = \sqrt{BM^2+BQ^2} \Rightarrow MQ = \frac{l\sqrt{6}}{2}, MT = TQ = \frac{l\sqrt{6}}{4}$
$\Rightarrow A_{MNDQ} = \frac{5l^2\sqrt{6}}{8}, A_{MNT} = \frac{MT \cdot MN}{2} = \frac{l^2\sqrt{6}}{8}, A_{TQD} = \frac{TQ \cdot QD}{2} = \frac{3l^2\sqrt{6}}{16}$
$\Rightarrow A_{TND} = \frac{5l^2\sqrt{6}}{16}$
Calculăm $AM = ND = \frac{l\sqrt{7}}{2}$
Cum $A_{TND} = \frac{TS \cdot ND}{2} \Rightarrow TS = \frac{5 \cdot l \cdot \sqrt{42}}{28}$, adică $TS = \frac{15 \cdot \sqrt{42}}{7}$.

4. Vom demonstra că din mulțimea $B = \{1,2,3,\ldots,11\}$ maxim 5 numere pot fi în S.
Considerăm următoarea partiție a lui B: $\{1,5\}, \{2,9\}, \{3,7\}, \{4,11\}, \{6,10\}, \{8\}$.

Dacă luăm 6 elemente din B , rezultă că ar trebui să luăm câte un element din fiecare mulțime.

Dacă $8 \in S \Rightarrow 1 \notin S \Rightarrow 5 \in S \Rightarrow 9 \notin S \Rightarrow 2 \in S \Rightarrow 6 \notin S \Rightarrow 10 \in S \Rightarrow 3 \notin S \Rightarrow 7 \in S \Rightarrow 11 \notin S \Rightarrow 4 \in S \Rightarrow 8 \notin S$ Fals

Deci, vom avea maxim 5 elemente din orice 11 elemente consecutive. Cele 5 numere pot fi luate de forma: $11 \cdot k + 1$, $11 \cdot k + 3$, $11 \cdot k + 4$, $11 \cdot k + 6$, $11 \cdot k + 9$.

Din mulțimea $\{1,2,3,\ldots,15\}$ maxim 8 sunt în S, deoarece considerăm partiția $\{1,8\},\{2,9\},\{3,7\},\{4,11\},\{5,12\},\{6,13\},\{10,14\},\{15\} \Longrightarrow$ nu putem avea 9 elemente din această mulțime.

2017 = 11·182 + 15⟹ avem maxim 5 ·182 + 8 = 918

Un exemplu de 8 elemente din 15 este 3, 5, 6, 8, 11, 14, 16, 17, iar exemplu de 5 cu 918 este: $S = \left\{\underbrace{1,3,4,6,9,}\underbrace{12,14,15,17,20,}\ldots,\underbrace{1995,1997,1998,2000,2003}\right\}$

BAREM DE CORECTARE

Clasa a VIII-a

Problema 1	
a) $A_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x-7\| \leq 1\} \Leftrightarrow A_0 = [6,8]$ $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x-5\| \leq 4\} \Leftrightarrow A_1 = [1,9]$	1p 1p
$b) A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x+2n-7\| \leq 3n+1, n \in \mathbb{N}\}$ $x \in [-5n+6, n+8]$ $card(A_n \cap \mathbb{Z}) = n+8+5n-6+1 = 6n+3$ $6n+3= 4023$, $n = 670$.	1p 1p 1p 2p
TOTAL	**7p**
Problema 2	
$x^2+4y^2+9z^2+20 = 4x+12y+24z$ $(x-2)^2+(2y-3)^2+(3z-4)^2 = 9$ $\|x-2\| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-2 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow x \in [-1,5]$ $\|2y-3\| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2y-3 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow y \in [0,3]$ $\|3z-4\| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 3z-4 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{7}{3} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$	 2p 1p 2p 2p
TOTAL	**7p**
Problema 3	
a) Fie *M* mijlocul lui *BB*' $\Rightarrow MN \|\| BC \|\| AD \Rightarrow$ *A*, *D*, *N*, *M* sunt coplanare. Intersecția dintre planele (*BFF*′) și (*ADN*) este dreapta *MQ*. $BB'F'F$ pătrat. În pătratul $BB'F'F$ avem $MQ \|\| B'F$. $AD \perp (B'BF), BF' \subset (B'BF) \Rightarrow AD \perp B'F$ $BF' \perp MQ, BF' \perp AD \Rightarrow BF' \perp (NAD), ND \subset (NAD) \Rightarrow BF' \perp ND$ b) Fie $\{T\} = BF' \cap MQ$. Fie $TS \perp ND$. Cum $BF' \perp (NAD) \Rightarrow BF' \perp TS \Rightarrow$ $d(BF', ND) = TS$ $A_{TND} = A_{MNDQ} - A_{MNT} - A_{TQD}, \quad A_{MNDQ} = \frac{(QD+MN) \cdot MQ}{2}$ $MN = l, QD = \frac{3l}{2}, MQ = \frac{l\sqrt{6}}{2}, ND = \frac{l\sqrt{7}}{2}, MT = TQ = \frac{l\sqrt{6}}{4}$ $A_{MNDQ} = \frac{5l^2\sqrt{6}}{8}, A_{MNT} = \frac{MT \cdot MN}{2} = \frac{l^2\sqrt{6}}{8}, A_{TQD} = \frac{TQ \cdot QD}{2} = \frac{3l^2\sqrt{6}}{16}$ $\Rightarrow A_{TND} = \frac{5l^2\sqrt{6}}{16}, \ TS = \frac{5 \cdot l \cdot \sqrt{42}}{28}$, adică $TS = \frac{15 \cdot \sqrt{42}}{7}$	 1p 1p 1p 1p 1p 2p
TOTAL	**7p**
Problema 4	
Vom demonstra că din mulțimea $B = \{1,2,3, \dots, 11\}$ maxim 5 numere pot fi în *S*. Considerăm următoarea partiție a lui *B*: $\{1,5\}, \{2,9\}, \{3,7\}, \{4,11\}, \{6,10\}, \{8\}$. Dacă luăm 6 elemente din *B* , rezultă că ar trebui să luăm câte un element din fiecare mulțime. $8 \in S \Rightarrow 1 \notin S \Rightarrow 5 \in S \Rightarrow 9 \notin S \Rightarrow 2 \in S \Rightarrow 6 \notin S \Rightarrow$ $10 \in S \Rightarrow 3 \notin S \Rightarrow 7 \in S \Rightarrow 11 \notin S \Rightarrow 4 \in S \Rightarrow 8 \notin S$ Fals Vom avea maxim 11 elemente din orice 11 elemente consecutive. Cele 5 numere pot fi luate de forma: $11 \cdot k + 1$, $11 \cdot k + 3$, $11 \cdot k + 4$, $11 \cdot k + 6$, $11 \cdot k + 9$. Din mulțimea $\{1,2,3, \dots, 15\}$ maxim 8 sunt în *S*, deoarece considerăm partiția $\{1,8\}, \{2,9\}, \{3,7\}, \{4,11\}, \{5,12\}, \{6,13\}, \{10,14\}, \{15\} \Rightarrow$ nu putem avea 9. $2017 = 11 \cdot 182 + 15 \Rightarrow$ avem maxim $5 \cdot 182 + 8 = 918$ Un exemplu de 8 elemente din 15 este 3, 5, 6, 8, 11, 14, 16, 17, iar exemplu de 5 cu 918 este: $S = \{\underbrace{1,3,4,6,9}, \underbrace{12,14,15,17,20}, \dots, \underbrace{1995,1997,1998,2000,2003}\}$	 1p 1p 1p 2p 1p 1p
TOTAL	**7p**