OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
14 DECEMBRIE 2019

CLASA a VIII-a

Subiectul 1.

a) Demonstraţi că $\dfrac{1}{\left|\left(\sqrt{2}-9\right)\left(\sqrt{2}-10\right)\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-10}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-9}$.

b) Considerăm numerele $x=\dfrac{44+24\sqrt{2}}{98}$ şi

$$y=\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{2}-3\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-3\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{2}-4\right)^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-9\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{2}-10\right)^2}}\ .$$

Demonstraţi că $\dfrac{y}{x}\in\mathbb{Z}$.

Subiectul 2.

a) Demonstraţi că numărul $n=k^2+\left(k+1\right)^2+k^2\cdot\left(k+1\right)^2$ este pătrat perfect, pentru orice număr natural nenul k.

b) Considerăm numărul $a=\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}}$, unde k este număr natural nenul. Determinaţi valoarea numărului k astfel încât $\left[a\right]=1000$.

Subiectul 3.

În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, $AB=8\,\text{cm}$, $BC=6\,\text{cm}$ şi $DD'=12\,\text{cm}$. Dacă punctul M este mijlocul segmentului DD', iar N este mijlocul segmentului CC' determinaţi:

a) distanța de la punctul A' la planul (ABM);

b) tangenta unghiului dintre dreptele AM și $D'N$.

Subiectul 4.

Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată de bază ABC, unde $\dfrac{AB}{VA}=\sqrt{2}$ şi O centrul bazei.

Punctul S este situate pe dreapta VO astfel încât $O\in\left(SV\right)$ şi $\dfrac{OS}{OV}=2$. Arătați că :

a) $\dfrac{P_{\Delta SAB}}{P_{\Delta VAB}}=3\sqrt{2}-3$.

b) Dreapta SA este paralelă cu planul (VBC).

c) $SA\perp\left(BCQ\right)$, unde punctul Q este simetricul punctului V față de dreapta AC.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: 3 ore