OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

2 februarie 2020

CLASA a VIII-a

1. **(7p**) Notăm $[x]$, partea întreagă a numărului real x. Arătați că $n \in \left(\frac{687}{16}, \frac{689}{16} \right)$, unde *n* este soluția ecuației: $\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 4}\right]+....+\left[\sqrt{n(n+1))}\right]=946, n\in\mathbb{N}^*$.

2. **a) (2p)** Arătați că: $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\geq x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$, pentru orice numere reale $x, y \geq 0$.

b) (5p) Arătaţi că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$**, are loc inegalitatea:**

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{4}+3\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

3. Fie punctele necoplanare *T, A, B, C*. Prin centrul de greutate *G* al triunghiului $\triangle ABC$ se construiesc dreptele *a, b, c*, astfel încât $a \parallel TA$, $b \parallel TB$, $c \parallel TC$ și $a\cap(TBC)=\{A'\}$, $b\cap(TAC)=\{B'\}$, $c\cap(TAB)=\{C'\}$.

a) **(4p)** Arătați că $(A'B'C')\parallel(ABC)$.

b) **(3p)** Determinați distanța dintre planele $(A'B'C')$ și (ABC), știind că distanța de la T la planul (ABC) este egală cu 12 cm.

4. (7p) În tetraedrul *MABC*, *P* este proiecția punctului *M* pe planul *(ABC)*, $P\in AC$. Dacă punctul *M* este egal depărtat de vârfurile triunghiului $\triangle ABC$, *MA=a*, $m(\sphericalangle BMC)=60^\circ$ și $m(\sphericalangle ACB)=30^\circ$, să se determine distanța de la punctul *P* la planul *(MBC)*.

Notă: **1. Toate subiectele sunt obligatorii.**

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.