Centrul Educațional Math Academy®

Meditații la Matematică Online Live • academiademate.ro

Evaluare Națională • Pregătire de admitere • Olimpiade
Clasele V–VIII

TEORIE MATEMATICĂ EVALUARE NAȚIONALĂ

Toată teoria de gimnaziu, sintetizată
pe fișe – câte un capitol pe pagină.

Numere și algebră ▪ Geometrie plană
Geometrie în spațiu ▪ Greșeli frecvente

prof. Andrei Octavian Dobre

Gradul didactic I • Evaluator național E.N. și Bacalaureat

MATH ACADEMY®

Cuprins

Mulțimi. Mulțimile de numere 3
Operații cu mulțimi 4
Divizibilitate în ℕ 5
Numere prime. C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. 6
Operații cu numere naturale 7
Fracții ordinare și fracții zecimale 8
Rapoarte și proporții 9
Mărimi proporționale 10
Procente. Probleme practice 11
Numere întregi și raționale 12
Puteri 13
Rădăcina pătrată. Radicali 14
Medii. Numere reale 15
Calcul algebric 16
Rapoarte de numere reale 17
Ecuații și inecuații 18
Sisteme de ecuații 19
Funcții 20
Puncte în plan. Reperul cartezian 21
Organizarea datelor. Probabilități 22
Punct, dreaptă, plan, segment 23
Perechi de unghiuri 24
Triunghiul 25
Linii importante în triunghi 26
Triunghiuri particulare 27
Patrulatere. Paralelogramul 28
Paralelograme particulare 29
Trapezul 30
Teorema lui Thales. Asemănarea 31
Relații metrice în triunghiul dreptunghic 32
Trigonometrie în triunghiul dreptunghic 33
Cercul 34
Poligoane regulate 35
Arii ale figurilor plane 36
Simetrie și transformări geometrice 37
Puncte, drepte și plane 38
Paralelism în spațiu 39
Perpendicularitate în spațiu 40
Unghiuri în spațiu 41
Prisma. Paralelipipedul. Cubul 42
Piramida 43
Trunchiul de piramidă 44
Cilindrul circular drept 45
Conul circular drept 46
Sfera 47
Arii și volume — tabel de sinteză 48
Unități de măsură 49
Greșeli frecvente 50
Notații și simboluri 51

ALGEBRĂ · CLASELE V–VIII

Mulțimi. Mulțimile de numere

Notații, apartenență, incluziune, mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Fișa 1

Noțiunea de mulțime

O **mulțime** este o colecție de obiecte distincte, numite **elemente**. Se notează cu litere mari: A, B, M; elementele cu litere mici.

- $x \in A$ — x **aparține** mulțimii A;
- $x \notin A$ — x nu aparține lui A;
- $\emptyset$ — mulțimea **vidă** (fără niciun element);
- $\text{card}(A)$ sau $|A|$ — numărul de elemente (cardinalul);
- $A \subset B$ — A este **inclusă** în B: orice element al lui A este și element al lui B;
- $A = B \iff A \subset B$ și $B \subset A$.

MODURI DE A DESCRIE O MULȚIME

Prin enumerare	$A = \{1, 3, 5, 7\}$
Prin proprietate	$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ impar}, \ x < 8\}$
Cu diagrama Venn--Euler	elementele se scriu în interiorul unei curbe închise

Mulțimile de numere

Mulțime	Denumire	Descriere
$\mathbb{N}$	numere naturale	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Z}$	numere întregi	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$; $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$, $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$
$\mathbb{Q}$	numere raționale	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ sunt numerele care se pot scrie ca fracție
$\mathbb{R}$	numere reale	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = numere **iraționale**

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

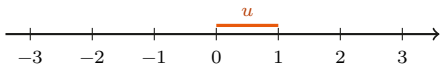
Numere iraționale

Numere care **nu** se pot scrie sub formă de fracție. Scrierea lor zecimală este infinită și neperiodică.

$$\sqrt{2}, \ \sqrt{3}, \ \sqrt[3]{5}, \ \pi, \ 0{,}1234\dots$$

Axa numerelor

Fiecărui număr real îi corespunde un punct pe axă și reciproc.



u = unitatea de măsură; O = originea.

ATENȚIE Orice număr natural este întreg, orice întreg este rațional, orice rațional este real — dar nu și invers. De exemplu $-3 \in \mathbb{Z}$, dar $-3 \notin \mathbb{N}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, dar $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

ALGEBRĂ · CLASELE V–VIII

Operații cu mulțimi

Reuniune, intersecție, diferență, produs cartezian

Fișa 2

Definiții

Operație	Notație și definiție	Se citește
Reuniunea	$A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$	elementele din A **sau** din B
Intersecția	$A \cap B = \{x \mid x \in A$ și $x \in B\}$	elementele comune
Diferența	$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ și $x \notin B\}$	elementele din A care nu sunt în B
Produsul cartezian	$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$	mulțimea perechilor ordonate

Proprietăți

- $A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$ (comutativitate)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociativitate)
- $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$

Mulțimi disjuncte și cardinal

Mulțimile A și B sunt **disjuncte** dacă $A \cap B = \emptyset$.

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B)$$

Dacă $\text{card}(A) = n$, mulțimea A are 2^n submulțimi.

Intervale de numere reale

Interval	Mulțime	Interval	Mulțime
$[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$(a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
$[a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$(a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
$(-\infty; a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	$(-\infty; a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Capătul **inclus** se marchează cu paranteză dreaptă [sau], capătul **exclus** cu paranteză rotundă. Simbolurile $-\infty$ și $+\infty$ nu sunt numere, deci sunt **întotdeauna** excluse.

DE REȚINUT $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\} = [-a; a]$ și $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\} = (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$, pentru $a \geq 0$.

ARITMETICĂ · CLASELE V–VI

Divizibilitate în $\mathbb{N}$

Divizori, multipli, criterii de divizibilitate

Fișa 3

Definiție

Fie $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$. Spunem că b **divide** a (notăm $b \mid a$) dacă există $c \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot c$.

- $b \mid a$ se citește: „b divide a”;
- $a \vdots b$ se citește: „a se divide cu b”;
- b se numește **divizor** al lui a;
- a se numește **multiplu** al lui b;
- D_a = mulțimea divizorilor lui a;
- M_b = mulțimea multiplilor lui b.

Proprietăți ale relației de divizibilitate

1. $1 \mid n$ și $n \mid n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
2. $n \mid 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;
3. dacă $a \mid b$ și $b \mid c$, atunci $a \mid c$;
4. dacă $d \mid a$ și $d \mid b$, atunci $d \mid (a \pm b)$;
5. dacă $d \mid a$, atunci $d \mid a \cdot n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
6. dacă $a \mid b$ și $b \mid a$, atunci $a = b$;
7. dacă $a \mid b$ și $b \neq 0$, atunci $a \leq b$.

Criterii de divizibilitate

Divizor	Criteriu — numărul n se divide cu …
2	ultima cifră este pară: $u(n) \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
3	suma cifrelor $S(n)$ se divide cu 3
4	numărul format din ultimele două cifre se divide cu 4
5	ultima cifră este 0 sau 5
9	suma cifrelor $S(n)$ se divide cu 9
10	ultima cifră este 0 (10^k: ultimele k cifre sunt 0)
25	numărul format din ultimele două cifre este 00, 25, 50 sau 75
6	se divide simultan cu 2 și cu 3
15	se divide simultan cu 3 și cu 5

ATENȚIE Criteriul „se divide cu $a \cdot b$ dacă se divide cu a și cu b” este valabil **numai** dacă a și b sunt prime între ele. De exemplu $36 \vdots 4$ și $36 \vdots 6$, dar 36 **nu** se divide cu $4 \cdot 6 = 24$, pentru că $(4, 6) = 2 \neq 1$. În schimb $36 \vdots 4$ și $36 \vdots 9$ garantează $36 \vdots 36$, fiindcă $(4, 9) = 1$.

ARITMETICĂ · CLASELE V–VI

Numere prime. C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.

Descompunere în factori primi, algoritmi de calcul

Fișa 4

Numere prime

Un număr natural $p \geq 2$ este **prim** dacă are exact doi divizori: 1 și p.

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ \ldots$$

- 2 este singurul număr prim par;
- 0 și 1 nu sunt nici prime, nici compuse;
- numerele ≥ 2 care nu sunt prime se numesc **compuse**.

Numere prime între ele

a și b sunt **prime între ele** (relativ prime) dacă $(a, b) = 1$, adică singurul divizor comun este 1.

$$(8, 15) = 1 \Rightarrow 8 \text{ și } 15 \text{ prime între ele}$$

Două numere prime distincte sunt întotdeauna prime între ele.

Descompunerea în factori primi

Orice număr natural $n \geq 2$ se scrie în mod unic (până la ordinea factorilor) sub forma

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ \ldots\ \cdot p_k^{\alpha_k}, \qquad p_i \text{ prime distincte, } \alpha_i \in \mathbb{N}^*$$

NUMĂRUL DIVIZORILOR

$$\text{card}(D_n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ \ldots\ \cdot (\alpha_k + 1)$$

Cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun

	C.m.m.d.c. — (a, b)	C.m.m.m.c. — $[a, b]$
Definiție	$d = (a, b)$ dacă $d \mid a$, $d \mid b$ și orice divizor comun d' verifică $d' \mid d$	$m = [a, b]$ dacă $a \mid m$, $b \mid m$ și m divide orice multiplu comun
Algoritm	se descompun a și b în factori primi; se iau factorii **comuni**, o singură dată, la exponentul cel mai **mic**	se iau factorii **comuni și necomuni**, o singură dată, la exponentul cel mai **mare**

$$(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b \qquad (a, b) = 1 \Rightarrow [a, b] = a \cdot b$$

PROPRIETĂȚI UTILE Dacă $d = (a, b)$, atunci $a = d \cdot x$, $b = d \cdot y$ cu $(x, y) = 1$.
Dacă $a \mid n$ și $b \mid n$, atunci $[a, b] \mid n$. Dacă $a \mid b \cdot c$ și $(a, b) = 1$, atunci $a \mid c$.

ARITMETICĂ · CLASELE V–VI

Operații cu numere naturale

Teorema împărțirii cu rest, ordinea operațiilor, sisteme de numerație

Fișa 5

Teorema împărțirii cu rest

Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, există și sunt unice $c, r \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$a = b \cdot c + r, \qquad 0 \leq r < b$$

unde a = deîmpărțit, b = împărțitor, c = cât, r = rest.

- $b \mid a \iff r = 0$;
- restul este **întotdeauna** mai mic decât împărțitorul;
- la împărțirea cu b se obțin b resturi posibile: $0, 1, \ldots, b-1$;
- în $\mathbb{Z}$: $a = b \cdot c + r$, cu $0 \leq r < |b|$.

Proprietățile operațiilor în $\mathbb{N}$

	Adunare	Înmulțire
Comutativitate	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativitate	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Element neutru	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Distributivitate	$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$ (factor comun: $a \cdot b \pm a \cdot c = a(b \pm c)$)	

Ordinea efectuării operațiilor

1. paranteze: rotunde ( ), drepte [ ], acolade { };
2. ridicări la putere și radicali;
3. înmulțiri și împărțiri, în ordinea scrierii;
4. adunări și scăderi, în ordinea scrierii.

Sume remarcabile

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$$

Numărul termenilor: $\dfrac{\text{ultimul} - \text{primul}}{\text{rația}} + 1$.

Scrierea numerelor

Forma zecimală	$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$
Baza 2	cifrele sunt 0 și 1; $\overline{a_k \ldots a_0}^{(2)} = a_k \cdot 2^k + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0$
Ultima cifră	$u(n)$ — se determină din periodicitatea puterilor: $u(2^n)$: $2, 4, 8, 6$; $u(3^n)$: $3, 9, 7, 1$; $u(7^n)$: $7, 9, 3, 1$; $u(5^n) = 5$, $u(6^n) = 6$

ARITMETICĂ · CLASELE V–VI

Fracții ordinare și fracții zecimale

Operații, transformări, comparare

Fișa 6

Fracții ordinare

Notație	$\frac{a}{b}$, cu a = numărător, b = numitor, $b \neq 0$
Subunitară	$a < b \quad (\frac{a}{b} < 1)$
Echiunitară	$a = b \quad (\frac{a}{b} = 1)$
Supraunitară	$a > b \quad (\frac{a}{b} > 1)$
Ireductibilă	$(a, b) = 1$
Echivalente	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$
Amplificare / simplificare	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$, $k \neq 0$ $\qquad \frac{a : k}{b : k}$, k divizor comun

Operații cu fracții

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

COMPARARE

Cu același numitor: mai mare este cea cu numărătorul mai mare. Cu același numărător: mai mare este cea cu numitorul mai mic. În general: se aduc la același numitor sau se compară produsele încrucișate.

Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare

Tipul fracției	Formula de transformare
Zecimală finită	$\overline{a, b_1 b_2 \ldots b_k} = \frac{\overline{a b_1 b_2 \ldots b_k}}{10^k}$
Periodică simplă	$a, \overline{(b_1 \ldots b_k)} = a + \frac{\overline{b_1 \ldots b_k}}{\underbrace{99\ldots9}_{k}}$
Periodică mixtă	$a, c_1 \ldots c_p \overline{(b_1 \ldots b_k)} = a + \frac{\overline{c_1 \ldots c_p b_1 \ldots b_k} - \overline{c_1 \ldots c_p}}{\underbrace{99\ldots9}_{k}\,\underbrace{00\ldots0}_{p}}$

DE REȚINUT O fracție ireductibilă $\frac{a}{b}$ se scrie ca fracție zecimală **finită** $\iff$ numitorul b are în descompunere doar factorii primi 2 și 5. Altfel, scrierea este periodică.

ARITMETICĂ · CLASA A VI-A

Rapoarte și proporții

Proporții derivate, șir de rapoarte egale

Fișa 7

Raport

Raportul numerelor a și b ($b \neq 0$) este câtul $\frac{a}{b}$.

- $\frac{a}{b} = k$ — k se numește **valoarea raportului**;
- rapoartele se pot amplifica și simplifica.

Proporție

Egalitatea a două rapoarte:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a, d — **extremii**; b, c — **mezii**.

Proprietatea fundamentală a proporțiilor

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$$ (produsul mezilor = produsul extremilor)

AFLAREA UNUI TERMEN NECUNOSCUT

$$a = \frac{b \cdot c}{d}; \qquad d = \frac{b \cdot c}{a}$$

$$b = \frac{a \cdot d}{c}; \qquad c = \frac{a \cdot d}{b}$$

Proporții derivate

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{c}{d},\ m \neq 0$$

Șir de rapoarte egale

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k \implies \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = k$$

Mai general, pentru $m_1, m_2, \ldots, m_n$ nu toate nule:

$$\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots + m_n a_n}{m_1 b_1 + m_2 b_2 + \cdots + m_n b_n} = k$$

PROCEDEU

Din $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ rezultă $a = bk$, $c = dk$ — se înlocuiește în condiția problemei și se află k.

ARITMETICĂ · CLASA A VI-A

Mărimi proporționale

Direct proporționale, invers proporționale, regula de trei simplă

Fișa 8

Mărimi direct proporționale

Numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt **direct proporționale** cu $b_1, b_2, \dots, b_n$ dacă

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k \qquad (k = \text{coeficient de proporționalitate})$$

Când una dintre mărimi crește de n ori, cealaltă crește tot de n ori. Graficul dependenței este o **semidreaptă** cu originea în O.

Mărimi invers proporționale

Numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt **invers proporționale** cu $b_1, b_2, \dots, b_n$ dacă

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = \dots = a_n \cdot b_n = k \qquad \text{sau, echivalent,} \qquad \frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = \dots = k$$

Când una dintre mărimi crește de n ori, cealaltă scade de n ori.

Regula de trei simplă

	Direct proporționale	Invers proporționale
Schema	$a \quad \dots \quad b$ $c \quad \dots \quad x$	$a \quad \dots \quad b$ $c \quad \dots \quad x$
Relația	$\frac{a}{c} = \frac{b}{x}$	$a \cdot b = c \cdot x$
Necunoscuta	$x = \frac{b \cdot c}{a}$	$x = \frac{a \cdot b}{c}$

Împărțirea unui număr în părți proporționale

Direct proporțional cu a, b, c

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{S}{a+b+c}$$

Invers proporțional cu a, b, c

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \frac{S}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

ATENȚIE „Invers proporțional cu a, b, c" înseamnă „direct proporțional cu $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$" — nu cu a, b, c în ordine inversă.

ARITMETICĂ · CLASELE VI–VIII

Procente. Probleme practice

Aflarea procentului, dobândă, scumpiri și ieftiniri

Fișa 9

Definiție și tipuri de probleme

$$p\% \text{ dintr-un număr } N = \frac{p}{100} \cdot N \qquad p\% = \frac{p}{100}$$

Se cere	Formula
$p\%$ din N	$x = \dfrac{p \cdot N}{100}$
Numărul, cunoscând $p\%$ din el	$N = \dfrac{100 \cdot x}{p}$
Ce procent reprezintă x din N	$p = \dfrac{x \cdot 100}{N}\ \%$

Scumpiri și ieftiniri

Mărire cu $p\%$	Micșorare cu $p\%$
$N_{\text{nou}} = N\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$	$N_{\text{nou}} = N\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)$

Două modificări succesive de $p\%$ și $q\%$: $N_{\text{final}} = N\left(1 \pm \dfrac{p}{100}\right)\left(1 \pm \dfrac{q}{100}\right)$

Dobânda simplă

S — suma depusă, $p\%$ — dobânda anuală, t — timpul în ani.

$$D = \frac{S \cdot p \cdot t}{100}$$

$$S_{\text{finală}} = S + D = S\left(1 + \frac{p \cdot t}{100}\right)$$

Pentru t luni: $D = \dfrac{S \cdot p \cdot t}{100 \cdot 12}$.

Concentrația soluției

$$c = \frac{m_{\text{substanță}}}{m_{\text{soluție}}} \cdot 100\ \%$$

$$m_{\text{soluție}} = m_{\text{substanță}} + m_{\text{solvent}}$$

La amestecarea a două soluții, masa de substanță se adună.

ATENȚIE O scumpire cu 20% urmată de o ieftinire cu 20% **nu** readuce prețul inițial: $1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$, deci prețul final este cu 4% mai mic. Procentele se aplică de fiecare dată la valoarea **curentă**, nu la cea inițială.

ALGEBRĂ · CLASELE VI–VII

Numere întregi și raționale

Opus, modul, reguli de semne, operații

Fișa 10

Numere întregi

Opusul lui a	$-a$; $\quad a+(-a)=0$; $\quad -(-a)=a$
Modulul lui a	$\lvert a\rvert = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$ — distanța de la a la 0 pe axă
Comparare	orice număr negativ $<0<$ orice număr pozitiv; dintre două numere negative, mai mare este cel cu modulul mai mic

Reguli de calcul cu semne

Adunare	Înmulțire și împărțire
acelasi semn: se adună modulele și se păstrează semnul	$(+)\cdot(+)=(+)$ $\quad (-)\cdot(-)=(+)$
semne diferite: se scad modulele și se ia semnul termenului cu modul mai mare	$(+)\cdot(-)=(-)$ $\quad (-)\cdot(+)=(-)$

Scăderea: $a-b=a+(-b)$. Desfacerea parantezelor: $+(a-b)=a-b,\ -(a-b)=-a+b$.

Proprietățile modulului

1. $\lvert a\rvert \geq 0,\ \forall a\in\mathbb{R};\ \lvert a\rvert=0 \iff a=0$;
2. $\lvert -a\rvert=\lvert a\rvert$;
3. $\lvert a\cdot b\rvert=\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$;
4. $\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert=\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert},\ b\neq 0$;
5. $\lvert a+b\rvert\leq\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$;
6. $\lvert a\rvert=\lvert b\rvert \iff a=b$ sau $a=-b$;
7. $\lvert a\rvert\leq r \iff -r\leq a\leq r\ (r\geq 0)$;
8. $\lvert a\rvert=a \iff a\geq 0$.

Numere raționale

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\ \middle|\ a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{Z}^*\right\}$. Orice număr rațional admite o scriere zecimală finită sau periodică.

- opusul lui $\frac{a}{b}$ este $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}$;
- inversul lui $\frac{a}{b}\neq 0$ este $\frac{b}{a}$;
- $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$;
- între două numere raționale distincte există o infinitate de numere raționale.

ALGEBRĂ · CLASELE VI–VII

Puteri

Reguli de calcul, exponent întreg, comparare

Fișa 11

Definiție

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}, \quad a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*; \qquad a^0 = 1\ (a \neq 0); \qquad a^1 = a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \in \mathbb{R}^*,\ n \in \mathbb{N}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

a = baza, n = exponentul. 0^0 nu are sens.

Reguli de calcul

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n},\ a \neq 0$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0$
6. $(-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ -1, & n \text{ impar} \end{cases}$

Semnul unei puteri

	n par	n impar
$a > 0$	$a^n > 0$	$a^n > 0$
$a < 0$	$a^n > 0$	$a^n < 0$

Deci $a^{2k} \geq 0$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$ — proprietate folosită la demonstrarea inegalităților.

Compararea puterilor

- aceeași bază $a > 1$: $a^m < a^n \iff m < n$;
- aceeași bază $0 < a < 1$: $a^m < a^n \iff m > n$;
- același exponent n par: se compară modulele bazelor;
- exponenți diferiți: se aduc la aceeași bază sau la același exponent.

ATENȚIE $a^m + a^n$ **nu** se poate simplifica direct — se dă factor comun: $a^m + a^n = a^m(1 + a^{n-m})$ pentru $m < n$. $(a+b)^n \neq a^n + b^n$. $-a^2 \neq (-a)^2$: primul este negativ, al doilea este pozitiv.

ALGEBRĂ · CLASA A VII-A

Rădăcina pătrată. Radicali

Reguli de calcul, scoaterea factorilor, raționalizare

Fișa 12

Definiție

$$\sqrt{a} = x \iff x^2 = a \text{ și } x \geq 0, \qquad a \geq 0$$

Rădăcina pătrată este definită doar pentru numere **nenegative** și rezultatul este **nenegativ**.

$$\sqrt{a^2} = |a|, \ \forall a \in \mathbb{R}; \qquad (\sqrt{a})^2 = a, \ a \geq 0$$

Reguli de calcul cu radicali $(a, b \geq 0)$

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
2. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}, \ b > 0$
3. $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}, \ a \geq 0$ (scoaterea factorilor)
4. $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}, \ a \geq 0$ (introducerea sub radical)
5. $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq \sqrt{a \pm b}$
6. $m\sqrt{a} + n\sqrt{a} = (m+n)\sqrt{a}$

Raționalizarea numitorului

Forma numitorului	Amplificare și rezultat
$a\sqrt{b}$	$\dfrac{c}{a\sqrt{b}} = \dfrac{c\sqrt{b}}{a \cdot b}$
$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$
$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\dfrac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$
$a + \sqrt{b}$	$\dfrac{c}{a+\sqrt{b}} = \dfrac{c(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$

Expresia cu care se amplifică se numește **conjugata** numitorului.

Formula radicalilor compuși

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

unde $c = \sqrt{a^2 - b}$, cu $a^2 - b \geq 0$ pătrat perfect.

Valori de reținut

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$
$\sqrt{5} \approx 2{,}23$	$\sqrt{6} \approx 2{,}45$
$\sqrt{7} \approx 2{,}64$	$\sqrt{10} \approx 3{,}16$

Pătrate perfecte: $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225$.

ALGEBRĂ · CLASELE VI–VIII

Medii. Numere reale

Media aritmetică, geometrică, ponderată; aproximări

Fișa 13

Tipuri de medii

Media	Formula
Aritmetică	$m_a = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ (pentru două numere: $m_a = \dfrac{a+b}{2}$)
Aritmetică ponderată	$m_p = \dfrac{a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$, p_i = ponderi
Geometrică	$m_g = \sqrt{a \cdot b},\ a, b \geq 0$
Armonică	$m_h = \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},\ a, b > 0$

Inegalitatea mediilor

$$\min(a,b) \leq m_h \leq m_g \leq m_a \leq \max(a,b), \qquad \forall\, a, b > 0$$

Egalitatea are loc **dacă și numai dacă** $a = b$. Consecință des folosită:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff a + b \geq 2\sqrt{ab} \iff \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,\ \forall x > 0 \qquad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,\ \forall a, b > 0$$

Partea întreagă și partea fracționară

$$[x] \leq x < [x] + 1, \qquad [x] \in \mathbb{Z}$$

$$\{x\} = x - [x], \qquad 0 \leq \{x\} < 1$$

$[x]$ — cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

Aproximări

- **prin lipsă** cu o zecimală: se taie zecimalele de la a doua;
- **prin adaos**: aproximarea prin lipsă $+0{,}1$;
- **rotunjire**: dacă zecimala următoare este ≥ 5, se mărește cu o unitate.

ALGEBRĂ · CLASELE VII–VIII

Calcul algebric

Formule de calcul prescurtat

Fișa 14

Formule fundamentale

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
4. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
5. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
6. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
7. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
8. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Identități derivate, utile în probleme

- $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$
- $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
- $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
- $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$
- $a^2 + b^2 \geq 2ab, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

Descompunerea în factori — metode

Factor comun	$ab + ac = a(b+c); \quad ax + ay + bx + by = (a+b)(x+y)$
Grupare de termeni	se grupează termenii care au factor comun
Formule de calcul	$a^2 - b^2, \ a^2 \pm 2ab + b^2, \ a^3 \pm b^3$
Trinomul $x^2 + sx + p$	$= (x - x_1)(x - x_2)$, unde $x_1 + x_2 = -s, \ x_1 x_2 = p$

ERORI FRECVENTE $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ — lipsește dublul produs. $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$.
$a^2 - b^2$ se descompune, dar $a^2 + b^2$ **nu** se descompune în $\mathbb{R}$.

ALGEBRĂ · CLASA A VIII-A

Rapoarte de numere reale

Condiții de existență, amplificare, operații cu fracții algebrice

Fișa 15

Condiții de existență

Un raport $\frac{E_1(x)}{E_2(x)}$ are sens **numai** pentru valorile lui x pentru care $E_2(x) \neq 0$.

Expresia	Condiția
$\frac{A}{B}$	$B \neq 0$
$\sqrt{A}$	$A \geq 0$
$\frac{A}{\sqrt{B}}$	$B > 0$

Operații cu rapoarte de numere reale

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B} \qquad \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD \pm BC}{BD} \qquad \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C},\ C \neq 0$$

ETAPELE SIMPLIFICĂRII UNEI EXPRESII

1. se pun condițiile de existență;
2. se descompun în factori numărătorii și numitorii;
3. se află numitorul comun (c.m.m.m.c. al numitorilor);
4. se efectuează operațiile și se simplifică rezultatul.

Simplificări tipice

- $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b,\ a \neq b$
- $\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b,\ a \neq -b$
- $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b} = a + b,\ a \neq -b$
- $\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$
- $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)}$
- $\frac{a - b}{b - a} = -1,\ a \neq b$

DE REȚINUT Condițiile de existență se pun **înainte** de a efectua calculele și se scriu în răspunsul final. La Evaluarea Națională, omiterea lor se penalizează chiar dacă restul rezolvării este corect.

ALGEBRĂ · CLASELE VII–VIII

Ecuații și inecuații

Ecuația de gradul I, ecuații cu modul, inecuații

Fișa 16

Ecuația de gradul I

$$ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$a \neq 0$	soluție unică: $x = -\frac{b}{a}$	(ecuație **determinată**)
$a = 0, b \neq 0$	nicio soluție: $S = \emptyset$	(ecuație **imposibilă**)
$a = 0, b = 0$	orice $x \in \mathbb{R}$ este soluție: $S = \mathbb{R}$	(ecuație **nedeterminată**)

REGULI DE TRANSFORMARE

Se pot aduna sau scădea aceleași expresii în ambii membri; se poate înmulți sau împărți cu un număr **nenul**. Termenii care conțin necunoscuta se trec într-un membru, cei liberi în celălalt.

Ecuații reductibile la gradul I

Ecuația $\lvert E(x)\rvert = a$	$a < 0 \Rightarrow S = \emptyset$; $a = 0 \Rightarrow E(x) = 0$; $a > 0 \Rightarrow E(x) = a$ sau $E(x) = -a$
Ecuația $A \cdot B = 0$	$A = 0$ sau $B = 0$
Ecuația $\frac{A}{B} = 0$	$A = 0$ și $B \neq 0$
Sumă de pătrate $= 0$	$A^2 + B^2 = 0 \iff A = 0$ și $B = 0$

Inecuații de gradul I

$$ax + b > 0 \quad (\geq, <, \leq)$$

$a > 0$	$a < 0$
$x > -\frac{b}{a}$, $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$	$x < -\frac{b}{a}$, $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$

ATENȚIE La înmulțirea sau împărțirea unei inecuații cu un număr **negativ**, sensul inegalității se **schimbă**: din $-2x > 6$ rezultă $x < -3$.

ALGEBRĂ · CLASA A VIII-A

Sisteme de ecuații

Metoda substituției, metoda reducerii, interpretare geometrică

Fișa 17

Sistemul de două ecuații cu două necunoscute

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

O **soluție** este o pereche ordonată (x_0, y_0) care verifică simultan ambele ecuații.

Metode de rezolvare

Metodă	Etape
Substituției	se exprimă o necunoscută din una dintre ecuații și se înlocuiește în cealaltă; se rezolvă ecuația cu o necunoscută; se revine pentru a doua necunoscută
Reducerii	se amplifică ecuațiile astfel încât coeficienții unei necunoscute să devină opuși; se adună ecuațiile; necunoscuta se elimină
Grafică	se reprezintă cele două drepte în reperul xOy; soluția este punctul lor de intersecție

Discuția sistemului

Condiție	Dreptele	Soluții	
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	concurente	soluție unică	(compatibil determinat)
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	paralele	$S = \emptyset$	(incompatibil)
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	confundate	o infinitate	(compatibil nedeterminat)

METODĂ DE LUCRU La problemele care se rezolvă cu ajutorul sistemelor: se notează necunoscutele cu x și y, se traduce fiecare informație din enunț într-o ecuație, se rezolvă sistemul, apoi se verifică soluția în contextul problemei (de exemplu, un număr de persoane trebuie să fie natural).

ALGEBRĂ · CLASA A VIII-A

Funcții

Noțiunea de funcție, graficul, funcția de gradul I

Fișa 18

Noțiunea de funcție

Fie A și B două mulțimi nevide. O **funcție** definită pe A cu valori în B este o corespondență prin care **fiecărui** element din A i se asociază un **singur** element din B.

$$f : A \to B, \qquad x \mapsto f(x)$$

- A — **domeniul de definiție**;
- B — **codomeniul**;
- $f(x)$ — **valoarea** funcției în x;
- $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ — **graficul**;
- moduri de a defini o funcție: diagramă, tabel de valori, formulă;
- $f = g \iff$ au același domeniu, același codomeniu și $f(x) = g(x), \forall x$.

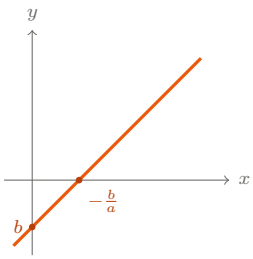
Funcția de gradul I

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

Graficul este o **dreaptă oblică**.

Intersecția cu Oy	$x = 0 \Rightarrow A(0;\ b)$
Intersecția cu Ox	$f(x) = 0 \Rightarrow B\left(-\frac{b}{a};\ 0\right)$
Monotonie	$a > 0$ — strict crescătoare; $a < 0$ — strict descrescătoare
Cazul $a = 0$	$f(x) = b$ — funcție constantă, grafic = dreaptă orizontală

Reprezentarea grafică



Sunt suficiente **două** puncte pentru a trasa dreapta.

Apartenența unui punct la grafic

$$M(x_0; y_0) \in G_f \iff y_0 = f(x_0)$$

- se înlocuiește x_0 în formulă și se compară cu y_0;
- punctul de intersecție a graficelor f și g: se rezolvă $f(x) = g(x)$.

ALGEBRĂ · CLASA A VIII-A

Puncte în plan. Reperul cartezian

Distanța, mijlocul segmentului, ecuația dreptei

Fișa 19

Reperul cartezian xOy

Două axe perpendiculare cu aceeași origine O: Ox — axa **absciselor**, Oy — axa **ordonatelor**. Fiecărui punct M îi corespunde o pereche ordonată $M(x_M;\ y_M)$, unde x_M = abscisa, y_M = ordonata.

Cadranul I	Cadranul II	Cadranul III	Cadranul IV
$x > 0,\ y > 0$	$x < 0,\ y > 0$	$x < 0,\ y < 0$	$x > 0,\ y < 0$

$M \in Ox \iff y_M = 0$; $M \in Oy \iff x_M = 0$.

Formule de bază

Distanța dintre două puncte	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Mijlocul segmentului AB	$M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2};\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$
Simetricul lui A față de M	$A'(2x_M - x_A;\ 2y_M - y_A)$
Simetricul lui A față de Ox / Oy / O	$(x_A; -y_A)$ / $(-x_A; y_A)$ / $(-x_A; -y_A)$

Dreapta în plan

Ecuația dreptei	$y = mx + n$, unde m = **panta**, n = ordonata la origine
Panta prin două puncte	$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A},\ x_A \neq x_B$
Drepte paralele	$d_1 \parallel d_2 \iff m_1 = m_2$ și $n_1 \neq n_2$
Puncte coliniare	A, B, C coliniare $\iff$ pantele $m_{AB} = m_{AC}$

ALGEBRĂ · CLASELE VI–VIII

Organizarea datelor. Probabilități

Reprezentarea datelor, media, probabilitatea unui eveniment

Fișa 20

Organizarea și reprezentarea datelor

Tabel de frecvențe	fiecărei valori i se asociază numărul de apariții (frecvența absolută)
Frecvența relativă	$f_{\text{rel}} = \dfrac{\text{frecvența absolută}}{\text{numărul total de date}}$, exprimată adesea procentual
Grafic cu bare	bare de înălțimi proporționale cu frecvențele
Grafic cu linii	potrivit pentru evoluția în timp a unei mărimi
Diagramă circulară	unghiul sectorului: $\alpha = \dfrac{f_{\text{rel}}}{100} \cdot 360^\circ$

Indicatori statistici

- **media aritmetică**: suma valorilor împărțită la numărul lor;
- **media ponderată**: când valorile apar de mai multe ori;
- **mediana**: valoarea din mijloc după ordonarea crescătoare a datelor;
- **modul**: valoarea cu frecvența cea mai mare.

Probabilitatea

$$P = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$$

- $0 \le P \le 1$;
- $P = 0$ — eveniment imposibil;
- $P = 1$ — eveniment sigur;
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ — evenimentul contrar.

DE REȚINUT La problemele de probabilități din Evaluarea Națională, cazurile posibile se numără **explicit** (de exemplu, elementele unei mulțimi date), iar cazurile favorabile se determină prin verificarea condiției din enunț pentru fiecare element. Rezultatul se poate scrie ca fracție ireductibilă sau ca procent.

GEOMETRIE · CLASA A VI-A

Punct, dreaptă, plan, segment

Noțiuni primare, poziții relative, măsurare

Fișa 21

Noțiuni primare

Punctul, **dreapta** și **planul** sunt noțiuni care nu se definesc. Se notează: punctele cu litere mari (A, B), dreptele cu litere mici (a, d) sau prin două puncte (AB), planele cu litere grecești (α, β).

- prin două puncte distincte trece o **singură** dreaptă;
- o dreaptă conține o infinitate de puncte;
- puncte **coliniare**: aparțin aceleiași drepte;
- drepte **concurente**: au un singur punct comun;
- drepte **paralele**: coplanare, fără puncte comune;
- drepte **identice**: au toate punctele comune.

Segment și semidreaptă

Segmentul $[AB]$	mulțimea punctelor dintre A și B, inclusiv capetele; AB = lungimea segmentului
Semidreapta $[AB$	originea A, trece prin B; are un capăt și este nemărginită în cealaltă direcție
Segmente congruente	$[AB] \equiv [CD] \iff AB = CD$
Mijlocul segmentului	$M \in [AB]$ cu $AM = MB = \dfrac{AB}{2}$
Mediatoarea	dreapta perpendiculară pe $[AB]$ în mijlocul său; mulțimea punctelor egal depărtate de A și B

Unghiul

Unghiul este reuniunea a două semidrepte cu aceeași origine. Se notează $\sphericalangle AOB$, unde O = vârful, $[OA$ și $[OB$ = laturile. Unghiurile se măsoară în grade, minute și secunde:

$$1^\circ = 60', \qquad 1' = 60''$$

Nul	Ascuțit	Drept	Obtuz	Alungit
0°	$(0^\circ; 90^\circ)$	90°	$(90^\circ; 180^\circ)$	180°

Bisectoarea unui unghi este semidreapta cu originea în vârf, interioară unghiului, care îl împarte în două unghiuri congruente. Punctele bisectoarei sunt egal depărtate de laturile unghiului.

GEOMETRIE · CLASA A VI-A

Perechi de unghiuri

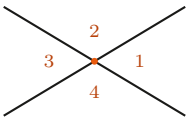
Adiacente, complementare, suplementare, opuse la vârf

Fișa 22

Clasificarea perechilor de unghiuri

Denumire	Definiție
Adiacente	au același vârf, o latură comună și niciun punct interior comun
Complementare	suma măsurilor este 90°; complementul lui x este $90^\circ - x$
Suplementare	suma măsurilor este 180°; suplementul lui x este $180^\circ - x$
Opuse la vârf	laturile unuia sunt prelungirile laturilor celuilalt; sunt **congruente**
Congruente	au aceeași măsură

Unghiuri opuse la vârf



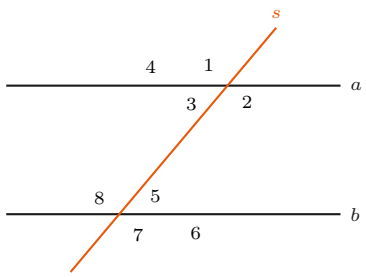
$\hat{1} \equiv \hat{3}$ și $\hat{2} \equiv \hat{4}$; $\hat{1} + \hat{2} = 180^\circ$.

Drepte perpendiculare

Două drepte sunt **perpendiculare** dacă formează un unghi drept: $a \perp b$.

- printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o **singură** perpendiculară pe acea dreaptă;
- **distanța** de la un punct la o dreaptă = lungimea perpendicularei duse din punct pe dreaptă.

Drepte paralele tăiate de o secantă



Alterne interne	$\hat{3} \equiv \hat{5}$, $\hat{2} \equiv \hat{8}$
Alterne externe	$\hat{1} \equiv \hat{7}$, $\hat{4} \equiv \hat{6}$
Corespondente	$\hat{1} \equiv \hat{5}$, $\hat{2} \equiv \hat{6}$, $\hat{3} \equiv \hat{7}$, $\hat{4} \equiv \hat{8}$
Interne de aceeași parte	$\hat{3} + \hat{8} = 180^\circ$, $\hat{2} + \hat{5} = 180^\circ$

RECIPROC Dacă două drepte tăiate de o secantă formează unghiuri alterne interne (sau corespondente) congruente, atunci dreptele sunt **paralele**. Aceasta este metoda standard de a demonstra paralelismul.

GEOMETRIE · CLASELE VI–VII

Triunghiul

Elemente, clasificare, suma unghiurilor, inegalități

Fișa 23

Elemente și notații

Notație	$\triangle ABC$
Vârfuri	A, B, C
Laturi	$[AB]$, $[BC]$, $[CA]$; se notează $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$
Unghiuri	$\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ (pe scurt $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$)
Perimetrul	$P = a + b + c$; semiperimetrul $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Clasificare

Criteriu	Tipuri		
După laturi	oarecare (scalen)	isoscel: două laturi congruente	echilateral: toate laturile congruente
După unghiuri	ascuțitunghic: toate unghiurile ascuțite	dreptunghic: un unghi drept	obtuzunghic: un unghi obtuz

Teoreme fundamentale

Suma unghiurilor	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$
Unghiul exterior	măsura unui unghi exterior este egală cu suma măsurilor celor două unghiuri interioare neadiacente lui
Inegalitatea triunghiului	$\lvert b - c \rvert < a < b + c$ — orice latură este mai mică decât suma celorlalte două și mai mare decât diferența lor
Latură — unghi opus	într-un triunghi, laturii mai mari i se opune unghiul mai mare, și reciproc

Cazurile de congruență a triunghiurilor

Triunghiuri oarecare	Triunghiuri dreptunghice
L.U.L. — două laturi și unghiul dintre ele	C.C. — cele două catete
U.L.U. — o latură și unghiurile alăturate	C.U. — o catetă și un unghi ascuțit
L.L.L. — cele trei laturi	I.U. — ipotenuza și un unghi ascuțit
	I.C. — ipotenuza și o catetă

Două triunghiuri sunt **congruente** dacă au laturile omoloage congruente și unghiurile omoloage congruente. Din congruență rezultă egalitatea **tuturor** elementelor corespunzătoare.

GEOMETRIE · CLASELE VI–VII

Linii importante în triunghi

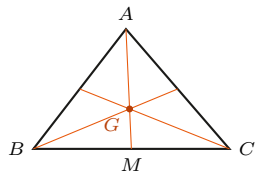
Mediana, bisectoarea, înălțimea, mediatoarea

Fișa 24

Definiții și puncte de concurență

Linia	Definiție	Punct de concurență
Mediana	segmentul care unește un vârf cu mijlocul laturii opuse	**centrul de greutate** G
Bisectoarea	semidreapta interioară care împarte un unghi în două unghiuri congruente	**centrul cercului înscris** I
Înălțimea	segmentul dus dintr-un vârf, perpendicular pe latura opusă (sau pe prelungirea ei)	**ortocentrul** H
Mediatoarea	dreapta perpendiculară pe o latură, dusă prin mijlocul acesteia	**centrul cercului circumscris** O

Centrul de greutate



$$AG = \frac{2}{3}AM, \qquad GM = \frac{1}{3}AM$$

Medianele se intersectează în G, situat la $\frac{2}{3}$ de vârf.

Cercul înscris și cercul circumscris

- I = intersecția bisectoarelor; $d(I, AB) = d(I, BC) = d(I, CA) = r$ — raza cercului **înscris**;
- O = intersecția mediatoarelor; $OA = OB = OC = R$ — raza cercului **circumscris**;
- aria: $\mathcal{A} = p \cdot r$, unde p = semiperimetrul.

Proprietăți importante

- într-un triunghi **isoscel**, mediana, bisectoarea, înălțimea și mediatoarea corespunzătoare bazei coincid;
- într-un triunghi **echilateral**, cele patru linii coincid pentru fiecare latură, iar $G = I = H = O$;
- într-un triunghi **dreptunghic**, ortocentrul este vârful unghiului drept, iar centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei;
- mediana din unghiul drept este egală cu jumătate din ipotenuză;
- punctele O, G, H sunt coliniare (dreapta lui Euler).

GEOMETRIE · CLASELE VI–VII

Triunghiuri particulare

Isoscel, echilateral, dreptunghic

Fișa 25

Triunghiul isoscel

Are două laturi congruente; a treia se numește **bază**.

- unghiurile alăturate bazei sunt congruente;
- bisectoarea unghiului de la vârf este simultan mediană, înălțime și mediatoare a bazei;
- este axial simetric față de această dreaptă;
- reciproc: dacă un triunghi are două unghiuri congruente, atunci este isoscel.

Triunghiul echilateral

Are toate laturile congruente ($AB = BC = CA = \ell$).

Unghiuri	toate unghiurile au 60°
Înălțimea	$h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$
Aria	$\mathcal{A} = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$
Raza cercului circumscris	$R = \dfrac{2}{3}h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{3}$
Raza cercului înscris	$r = \dfrac{1}{3}h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{6}$

Triunghiul dreptunghic

Are un unghi de 90°; laturile care formează unghiul drept sunt **catetele**, latura opusă este **ipotenuza**.

- cele două unghiuri ascuțite sunt **complementare**: $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$;
- mediana din unghiul drept este egală cu jumătate din ipotenuză: $AM = \dfrac{BC}{2}$;
- cateta opusă unghiului de 30° este egală cu jumătate din ipotenuză (teorema 30°–60°–90°);
- aria: $\mathcal{A} = \dfrac{c_1 \cdot c_2}{2}$;
- ipotenuza este cea mai mare latură.

Triunghiuri remarcabile — elemente

Triunghi	Laturi	Unghiuri	Observație
Dreptunghic isoscel	$a,\ a,\ a\sqrt{2}$	$45^\circ,\ 45^\circ,\ 90^\circ$	jumătate de pătrat
30°–60°–90°	$a,\ a\sqrt{3},\ 2a$	$30^\circ,\ 60^\circ,\ 90^\circ$	jumătate de triunghi echilateral
Egiptean	$3k,\ 4k,\ 5k$	—	dreptunghic (Pitagora)

GEOMETRIE · CLASA A VII-A

Patrulatere. Paralelogramul

Definiție, proprietăți, condiții de paralelogram

Fișa 26

Patrulaterul convex

- vârfuri: A, B, C, D;
- laturi: $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$;
- diagonale: $[AC]$, $[BD]$;
- suma unghiurilor: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$;
- suma unghiurilor exterioare: 360°;
- perimetrul: suma lungimilor laturilor.

Paralelogramul

Definiție: patrulaterul convex cu laturile opuse paralele ($AB \parallel CD$ și $BC \parallel AD$).

Proprietăți	Consecințe
laturile opuse sunt congruente	$AB = CD$, $BC = AD$
unghiurile opuse sunt congruente	$\hat{A} \equiv \hat{C}$, $\hat{B} \equiv \hat{D}$
unghiurile alăturate sunt suplementare	$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$
diagonalele se înjumătățesc	$AO = OC$, $BO = OD$
centrul O este centru de simetrie	orice dreaptă prin O îl împarte în două părți congruente

Condiții suficiente ca un patrulater să fie paralelogram

1. laturile opuse sunt paralele;
2. laturile opuse sunt congruente;
3. două laturi opuse sunt paralele **și** congruente;
4. unghiurile opuse sunt congruente;
5. diagonalele se înjumătățesc.

Linia mijlocie

În triunghi	segmentul care unește mijloacele a două laturi; este **paralel** cu a treia latură și **egal cu jumătate** din ea: $MN \parallel BC$, $MN = \frac{BC}{2}$
În trapez	segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele; $MN \parallel$ baze și $MN = \frac{B+b}{2}$

GEOMETRIE · CLASA A VII-A

Paralelograme particulare

Dreptunghiul, rombul, pătratul

Fișa 27

Dreptunghiul

Definiție: paralelogramul cu un unghi drept.

- are toate proprietățile paralelogramului;
- toate unghiurile sunt drepte;
- diagonalele sunt **congruente**: $AC = BD$;
- diagonalele se înjumătățesc;
- are două axe de simetrie (mediatoarele laturilor);
- $\mathcal{A} = L \cdot \ell, \quad P = 2(L + \ell), \quad d = \sqrt{L^2 + \ell^2}$.

Rombul

Definiție: paralelogramul cu două laturi consecutive congruente (deci toate laturile congruente).

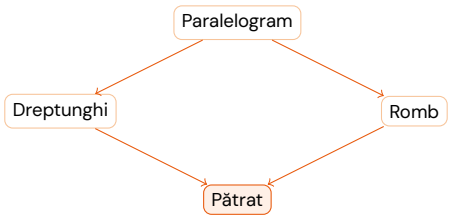
- are toate proprietățile paralelogramului;
- toate laturile sunt congruente;
- diagonalele sunt **perpendiculare**;
- diagonalele sunt **bisectoarele** unghiurilor;
- are două axe de simetrie (diagonalele);
- $\mathcal{A} = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2} = \ell^2 \sin(\sphericalangle A), \quad P = 4\ell$.

Pătratul

Definiție: rombul cu un unghi drept (echivalent: dreptunghiul cu două laturi consecutive congruente).

- are **toate** proprietățile dreptunghiului și ale rombului;
- toate laturile congruente, toate unghiurile drepte;
- diagonalele: congruente, perpendiculare, bisectoare;
- are patru axe de simetrie;
- $\mathcal{A} = \ell^2 = \dfrac{d^2}{2}, \quad P = 4\ell, \quad d = \ell\sqrt{2}$.

Schema de incluziuni



Săgeata înseamnă „este un caz particular al”. Pătratul este simultan dreptunghi și romb.

GEOMETRIE · CLASA A VII-A

Trapezul

Definiție, tipuri, linia mijlocie, arie

Fișa 28

Definiție și elemente

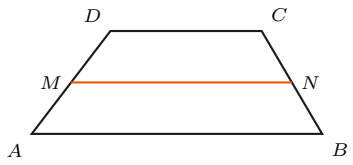
Trapezul este patrulaterul convex cu două laturi paralele și celelalte două neparalele.

Baze	laturile paralele: B = baza mare, b = baza mică
Laturi neparalele	laturile oblice
Înălțimea	distanța dintre baze: h
Unghiurile alăturate laturii oblice	sunt suplementare

Tipuri de trapeze

Tip	Definiție și proprietăți
Oarecare	fără proprietăți suplimentare
Dreptunghic	are un unghi drept; o latură oblică este perpendiculară pe baze și este chiar înălțimea
Isoscel	laturile neparalele sunt congruente. Atunci: unghiurile alăturate fiecărei baze sunt congruente; **diagonalele sunt congruente**; are o axă de simetrie (mediatoarea bazelor)

Linia mijlocie și segmentul dintre mijloacele diagonalelor



$MN = \dfrac{B+b}{2}, \qquad MN \parallel AB \parallel DC$

$ST = \dfrac{|B-b|}{2}$ (S, T mijloacele diagonalelor)

Aria trapezului

$$\mathcal{A} = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = MN \cdot h$$

Diagonalele trapezului îl împart în patru triunghiuri; cele două triunghiuri care au ca baze laturile neparalele au **arii egale**.

GEOMETRIE · CLASA A VII-A

Teorema lui Thales. Asemănarea

Segmente proporționale, triunghiuri asemenea

Fișa 29

Teorema lui Thales

O paralelă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi (sau pe prelungirile lor) segmente proporționale.

$$MN \parallel BC \iff \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \quad \text{și} \quad \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Reciproca: dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$, atunci $MN \parallel BC$ — metodă standard de a demonstra paralelismul.

Teorema fundamentală a asemănării

O paralelă la o latură a unui triunghi formează cu celelalte două laturi un triunghi **asemenea** cu cel dat:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

Triunghiuri asemenea

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP \iff \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CA}{PM} = k \text{ și } \hat{A} \equiv \hat{M},\ \hat{B} \equiv \hat{N},\ \hat{C} \equiv \hat{P}$$

k se numește **raport de asemănare**.

CAZURI DE ASEMĂNARE

U.U.	două unghiuri respectiv congruente
L.U.L.	două laturi proporționale și unghiul dintre ele congruent
L.L.L.	cele trei laturi respectiv proporționale

Consecințe ale asemănării

- raportul perimetrelor $= k$;
- raportul înălțimilor, medianelor, bisectoarelor omoloage $= k$;
- raportul razelor cercurilor înscrise/circumscrise $= k$;
- **raportul ariilor** $= k^2$;
- toate triunghiurile echilaterale sunt asemenea;
- două triunghiuri congruente sunt asemenea cu $k = 1$.

TEOREMA BISECTOAREI Bisectoarea unui unghi al unui triunghi determină pe latura opusă segmente proporționale cu laturile alăturate: dacă $[AD$ este bisectoarea $\sphericalangle A$, $D \in (BC)$, atunci $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

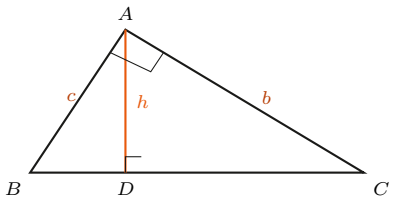
GEOMETRIE · CLASA A VII-A

Relații metrice în triunghiul dreptunghic

Teorema lui Pitagora, teorema catetei, teorema înălțimii

Fișa 30

Configurația de bază



$\triangle ABC$ dreptunghic în A, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Notăm $a = BC$ (ipotenuza), $b = AC$, $c = AB$ (catetele), $h = AD$ (înălțimea din unghiul drept), BD și DC = **proiecțiile** catetelor pe ipotenuză.

Cele trei teoreme

Teorema	Relația
Teorema lui Pitagora	$a^2 = b^2 + c^2$, adică $BC^2 = AB^2 + AC^2$
Reciproca lui Pitagora	dacă $BC^2 = AB^2 + AC^2$, atunci $\triangle ABC$ este dreptunghic în A
Teorema catetei	$AB^2 = BD \cdot BC$ și $AC^2 = DC \cdot BC$
Teorema înălțimii	$AD^2 = BD \cdot DC$
Relația ariilor	$AB \cdot AC = AD \cdot BC$, deci $h = \dfrac{b \cdot c}{a}$
Relația razelor	$\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

Consecințe utile

- $BD + DC = BC$;
- mediana din A: $AM = \dfrac{BC}{2}$;
- raza cercului circumscris: $R = \dfrac{a}{2}$;
- raza cercului înscris: $r = \dfrac{b + c - a}{2}$;
- aria: $\mathcal{A} = \dfrac{b \cdot c}{2} = \dfrac{a \cdot h}{2}$;
- triplete pitagoreice: $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$, $(7, 24, 25)$.

GEOMETRIE · CLASA A VII-A

Trigonometrie în triunghiul dreptunghic

Sinus, cosinus, tangentă, cotangentă

Fișa 31

Definiții

În $\triangle ABC$ dreptunghic în A, pentru un unghi ascuțit x:

$$\sin x = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuza}} \qquad \cos x = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuza}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}$$

Tabelul valorilor

Funcția	30°	45°	60°
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Relații între funcțiile trigonometrice

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (formula fundamentală)
2. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$
3. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$
4. $\sin(90^\circ - x) = \cos x$
5. $\cos(90^\circ - x) = \sin x$
6. $\operatorname{tg}(90^\circ - x) = \operatorname{ctg} x$

Din relația 4 și 5: dacă $\hat{B}$ și $\hat{C}$ sunt unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic, atunci $\sin \hat{B} = \cos \hat{C}$.

Aplicații

Aflarea unei laturi	$c_{\text{opusă}} = \text{ip} \cdot \sin x$; $\quad c_{\text{alăturată}} = \text{ip} \cdot \cos x$
Aria unui triunghi oarecare	$\mathcal{A} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\sphericalangle A)}{2}$
Aria paralelogramului	$\mathcal{A} = AB \cdot BC \cdot \sin(\sphericalangle ABC)$
Unghiul de înclinare	în probleme practice (rampe, umbre, scări), se modelează cu un triunghi dreptunghic

GEOMETRIE · CLASA A VII-A

Cercul

Elemente, unghiuri, lungimi, arii

Fișa 32

Elemente

Cercul $\mathcal{C}(O, r)$ este mulțimea punctelor din plan situate la distanța $r > 0$ față de un punct fix O.

Centrul	punctul O
Raza	segmentul $[OA]$ cu A pe cerc, sau lungimea sa r
Coarda	segment care unește două puncte ale cercului
Diametrul	coarda care trece prin centru; $d = 2r$ — cea mai lungă coardă
Arcul	porțiune de cerc determinată de două puncte: $\overset{\frown}{AB}$
Discul	cercul împreună cu interiorul său

Unghiuri în cerc

Unghi la centru	are vârful în O; măsura sa este egală cu măsura arcului cuprins între laturi: $\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AB}$
Unghi înscris	are vârful pe cerc; măsura sa este **jumătate** din măsura arcului cuprins: $\sphericalangle MNP = \dfrac{\overset{\frown}{MP}}{2}$
Consecință	unghiul înscris într-un semicerc este **drept** (90°)
Consecință	unghiurile înscrise care subîntind același arc sunt congruente

Lungimi și arii

Lungimi	Arii
$L_{\text{cerc}} = 2\pi r = \pi d$	$\mathcal{A}_{\text{disc}} = \pi r^2$
$\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi r n}{180}$ (n = măsura arcului în grade)	$\mathcal{A}_{\text{sector}} = \dfrac{\pi r^2 n}{360} = \dfrac{\ell \cdot r}{2}$

$\pi \approx 3{,}14$. Aria coroanei circulare: $\mathcal{A} = \pi(R^2 - r^2)$.

Poziții relative

- **dreaptă și cerc**: $d(O, \text{dreapta}) > r$ — exterioară; $= r$ — **tangentă**; $< r$ — secantă;
- raza dusă în punctul de tangență este **perpendiculară** pe tangentă;
- tangentele duse dintr-un punct exterior sunt **congruente**;
- diametrul perpendicular pe o coardă o **înjumătățește**;
- coarde congruente sunt egal depărtate de centru.

GEOMETRIE · CLASA A VII-A

Poligoane regulate

Triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat

Fișa 33

Definiție și elemente

Un **poligon regulat** are toate laturile congruente și toate unghiurile congruente. Orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc și circumscrie unui cerc, cele două cercuri fiind **concentrice**.

Apotema a_n	distanța de la centru la o latură (raza cercului înscris)
Raza R	distanța de la centru la un vârf (raza cercului circumscris)
Unghiul la centru	$\dfrac{360^\circ}{n}$
Unghiul interior	$\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$
Suma unghiurilor interioare	$(n-2)\cdot 180^\circ$
Numărul diagonalelor	$\dfrac{n(n-3)}{2}$

Poligoanele regulate din programa de gimnaziu

Element	Triunghi echilateral	Pătrat	Hexagon regulat
Latura ℓ_n	$\ell_3 = R\sqrt{3}$	$\ell_4 = R\sqrt{2}$	$\ell_6 = R$
Apotema a_n	$a_3 = \dfrac{R}{2} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{6}$	$a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\ell}{2}$	$a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$
Raza R	$R = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{3}$	$R = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$	$R = \ell$
Aria	$\mathcal{A} = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$	$\mathcal{A} = \ell^2$	$\mathcal{A} = \dfrac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$
Unghiul interior	60°	90°	120°

Formula generală a ariei

$$\mathcal{A}_{\text{poligon regulat}} = \frac{P \cdot a_n}{2} = \frac{n \cdot \ell_n \cdot a_n}{2}$$

DE REȚINUT Hexagonul regulat este format din **șase** triunghiuri echilaterale cu latura egală cu raza cercului circumscris. De aceea $\ell_6 = R$ și $\mathcal{A}_{\text{hexagon}} = 6 \cdot \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$.

GEOMETRIE · CLASELE VI–VIII

Arii ale figurilor plane

Tabel de sinteză și metode de calcul

Fișa 34

Formule de arie

Figura	Aria
Triunghi oarecare	$\mathcal{A} = \dfrac{b \cdot h}{2}$ (b = baza, h = înălțimea corespunzătoare)
Triunghi — formula lui Heron	$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ p = \dfrac{a+b+c}{2}$
Triunghi — cu sinus	$\mathcal{A} = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}$
Triunghi — cu raza înscrisă	$\mathcal{A} = p \cdot r$
Triunghi dreptunghic	$\mathcal{A} = \dfrac{c_1 \cdot c_2}{2} = \dfrac{a \cdot h}{2}$
Triunghi echilateral	$\mathcal{A} = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$
Pătrat	$\mathcal{A} = \ell^2 = \dfrac{d^2}{2}$
Dreptunghi	$\mathcal{A} = L \cdot \ell$
Paralelogram	$\mathcal{A} = b \cdot h = AB \cdot BC \cdot \sin(\sphericalangle B)$
Romb	$\mathcal{A} = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2} = \ell^2 \sin(\sphericalangle A) = b \cdot h$
Trapez	$\mathcal{A} = \dfrac{(B+b) \cdot h}{2}$
Poligon regulat	$\mathcal{A} = \dfrac{P \cdot a_n}{2}$
Disc	$\mathcal{A} = \pi r^2$
Sector circular	$\mathcal{A} = \dfrac{\pi r^2 n}{360}$

METODE DE LUCRU Pentru figuri neregulate: se **descompune** figura în triunghiuri și patrulatere cunoscute, sau se **completează** la o figură simplă din care se scad părțile în plus.
Raportul ariilor a două figuri asemenea este egal cu **pătratul** raportului de asemănare.

GEOMETRIE · CLASA A VI-A

Simetrie și transformări geometrice

Simetrie axială, simetrie centrală, translație

Fișa 35

Simetria față de un punct

Punctele A și A' sunt **simetrice** față de punctul O dacă O este mijlocul segmentului $[AA']$.

- O se numește **centru de simetrie**;
- simetricul lui O față de O este O însuși;
- simetria centrală păstrează lungimile și măsurile unghiurilor;
- figuri cu centru de simetrie: segmentul, paralelogramul, cercul, dreptunghiul, rombul, pătratul.

Simetria față de o dreaptă

Punctele A și A' sunt simetrice față de dreapta d dacă d este **mediatoarea** segmentului $[AA']$.

- d se numește **axă de simetrie**;
- punctele de pe d sunt propriile lor simetrice;
- simetria axială păstrează lungimile și unghiurile.

NUMĂRUL AXELOR DE SIMETRIE

Figura	Triunghi isoscel	Triunghi echilateral	Dreptunghi	Pătrat	Cerc
Axe	1	3	2	4	o infinitate

Alte transformări

Translația	deplasarea tuturor punctelor cu aceeași distanță, în aceeași direcție și același sens
Rotația	în jurul unui punct, cu un unghi dat
Asemănarea	modifică lungimile în același raport k, păstrând unghiurile

Simetria, translația și rotația sunt **izometrii**: păstrează distanțele, deci transformă o figură într-o figură **congruentă** cu ea.

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU · CLASA A VIII-A

Puncte, drepte și plane

Determinarea planului, poziții relative

Fișa 36

Determinarea unui plan

Un plan este determinat de:

1. trei puncte necoliniare;
2. o dreaptă și un punct exterior ei;
3. două drepte concurente;
4. două drepte paralele distincte.

Puncte **coplanare**: aparțin aceluiași plan. Dacă două puncte ale unei drepte aparțin unui plan, atunci întreaga dreaptă este inclusă în plan.

Poziții relative a două drepte în spațiu

Poziție	Caracterizare
Concurente	coplanare, au exact un punct comun
Paralele	coplanare, fără puncte comune
Identice	toate punctele comune
Necoplanare	nu există niciun plan care să le conțină pe ambele; nu au puncte comune, dar **nu** sunt paralele

Poziții relative dreaptă–plan și plan–plan

Dreapta d și planul α	Planele α și β
$d \subset \alpha$ — dreapta este inclusă în plan	$\alpha = \beta$ — plane confundate
$d \cap \alpha = \{P\}$ — dreapta „înțeapă” planul	$\alpha \cap \beta = d$ — plane secante, se intersectează după o dreaptă
$d \cap \alpha = \emptyset$ — dreapta este **paralelă** cu planul	$\alpha \cap \beta = \emptyset$ — plane **paralele**

Unghiul a două drepte în spațiu

- dacă d_1 și d_2 sunt concurente, unghiul lor este cel mai mic dintre unghiurile formate;
- dacă $d_1 \parallel d_2$, unghiul lor este $0°$;
- dacă d_1 și d_2 sunt **necoplanare**: prin același punct se duc paralele $a \parallel d_1$ și $b \parallel d_2$; unghiul lui d_1 cu d_2 este unghiul dintre a și b;
- drepte **perpendiculare** în spațiu: unghiul lor este de $90°$ (pot fi și necoplanare).

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU · CLASA A VIII-A

Paralelism în spațiu

Dreaptă paralelă cu plan, plane paralele

Fișa 37

Dreaptă paralelă cu un plan

Definiție	$d \parallel \alpha \iff d \cap \alpha = \emptyset$
Criteriu	dacă $d \parallel a$ și $a \subset \alpha$, cu $d \not\subset \alpha$, atunci $d \parallel \alpha$
Proprietate	dacă $d \parallel \alpha$ și un plan β care conține d taie α după dreapta a, atunci $d \parallel a$

Plane paralele

Definiție	$\alpha \parallel \beta \iff \alpha \cap \beta = \emptyset$
Criteriu	dacă două drepte concurente din α sunt paralele cu două drepte concurente din β, atunci $\alpha \parallel \beta$
Proprietate	dacă $\alpha \parallel \beta$ și un plan γ le taie pe amândouă, dreptele de intersecție sunt **paralele**
Distanța	distanța dintre două plane paralele este constantă

Teorema lui Thales în spațiu

Mai multe plane paralele determină pe două drepte secante segmente **proporționale**.

$$\alpha \parallel \beta \parallel \gamma, \quad d_1 \cap = \{A, B, C\}, \quad d_2 \cap = \{A', B', C'\} \implies \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Proprietăți de tranzitivitate

- dacă $a \parallel b$ și $b \parallel c$, atunci $a \parallel c$;
- dacă $\alpha \parallel \beta$ și $\beta \parallel \gamma$, atunci $\alpha \parallel \gamma$;
- dacă $\alpha \parallel \beta$ și $d \subset \alpha$, atunci $d \parallel \beta$;
- dacă $d \parallel \alpha$ și $\alpha \parallel \beta$, atunci $d \parallel \beta$ sau $d \subset \beta$.

ATENȚIE Două drepte paralele cu același plan **nu** sunt neapărat paralele între ele — pot fi concurente sau necoplanare. Tranzitivitatea funcționează pentru drepte cu drepte și plane cu plane, nu în combinație.

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU · CLASA A VIII-A

Perpendicularitate în spațiu

Dreaptă perpendiculară pe plan, teorema celor trei perpendiculare

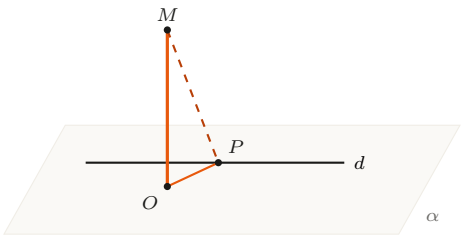
Fișa 38

Dreaptă perpendiculară pe plan

Definiție	$d \perp \alpha$ dacă d este perpendiculară pe **orice** dreaptă din α
Criteriu	dacă $d \perp a$, $d \perp b$, cu $a, b \subset \alpha$ și $a \cap b = \{O\}$, atunci $d \perp \alpha$
Unicitate	printr-un punct dat se poate duce o **singură** perpendiculară pe un plan
Proprietate	dacă $d \perp \alpha$ și $d' \parallel d$, atunci $d' \perp \alpha$; dacă $d \perp \alpha$ și $d \perp \beta$, atunci $\alpha \parallel \beta$

Criteriul este esențial: se demonstrează perpendicularitatea pe **două drepte concurente** din plan, nu pe una singură.

Teorema celor trei perpendiculare (T3P)



Ipoteză	$MO \perp \alpha$ $(O \in \alpha)$, $OP \perp d$ $(P \in d)$, $d \subset \alpha$
Concluzie	$MP \perp d$
Reciproca 1	dacă $MO \perp \alpha$, $MP \perp d$, $d \subset \alpha$, atunci $OP \perp d$
Reciproca 2	dacă $MP \perp d$, $OP \perp d$, $d \subset \alpha$, $MO \perp OP$, atunci $MO \perp \alpha$

Proiecții și distanțe

Proiecția unui punct pe plan	piciorul perpendicularei duse din punct pe plan
Distanța de la punct la plan	lungimea acestei perpendiculare — este cea mai **mică** distanță de la punct la punctele planului
Proiecția unei drepte	mulțimea proiecțiilor punctelor sale; este o dreaptă (sau un punct, dacă $d \perp \alpha$)
Distanța dintre două drepte necoplanare	lungimea perpendicularei comune

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU · CLASA A VIII-A

Unghiuri în spațiu

Unghiul dreaptă–plan, unghiul diedru, plane perpendiculare

Fișa 39

Unghiul dintre o dreaptă și un plan

Definiție	unghiul dintre dreaptă și **proiecția** ei pe plan
$d \parallel \alpha$ **sau** $d \subset \alpha$	unghiul este 0°
$d \perp \alpha$	unghiul este 90°
În celelalte cazuri	$\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d, d')$, unde $d' = \text{pr}_\alpha d$

Metodă de lucru: se coboară perpendiculara din punctul de pe dreaptă pe plan, se unește piciorul perpendicularei cu punctul de intersecție dintre dreaptă și plan — se obține un triunghi dreptunghic în care se calculează unghiul.

Unghiul diedru

Diedrul este figura formată de două semiplane cu aceeași frontieră (muchia diedrului).

Unghi plan corespunzător	se obține ducând, dintr-un punct al muchiei, câte o perpendiculară pe muchie în fiecare semiplan
Măsura diedrului	măsura unghiului plan corespunzător
Unghiul a două plane secante	cel mai mic dintre cele patru diedre formate

Plane perpendiculare

Definiție	$\alpha \perp \beta$ dacă unghiul diedru dintre ele este de 90°
Criteriu	dacă $d \subset \alpha$ și $d \perp \beta$, atunci $\alpha \perp \beta$
Proprietate	dacă $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = a$, $d \subset \alpha$ și $d \perp a$, atunci $d \perp \beta$

STRATEGIE DE REZOLVARE Aproape toate problemele de geometrie în spațiu din Evaluarea Națională se reduc la identificarea unui **triunghi dreptunghic** în care se aplică Pitagora, teorema catetei/înălțimii sau raporturi trigonometrice. Pașii: se face desenul, se marchează perpendicularele, se aplică T3P dacă e nevoie, se izolează triunghiul dreptunghic.

CORPURI GEOMETRICE · CLASA A VIII-A

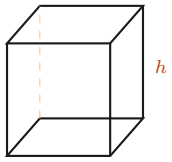
Prisma. Paralelipipedul. Cubul

Elemente, arii, volume, diagonale

Fișa 40

Prisma

Prisma este corpul mărginit de două poligoane congruente și paralele (bazele) și de paralelograme (fețele laterale). Prisma este **dreaptă** dacă muchiile laterale sunt perpendiculare pe baze și **regulată** dacă, în plus, bazele sunt poligoane regulate.



$$\mathcal{A}_\ell = P_{\text{bazei}} \cdot h, \qquad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + 2\mathcal{A}_{\text{bazei}}, \qquad \mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{bazei}} \cdot h$$

Paralelipipedul dreptunghic

Prismă dreaptă cu baza dreptunghi; are 6 fețe dreptunghiulare, 12 muchii, 8 vârfuri. Dimensiuni: a, b, c.

$$\mathcal{A}_\ell = 2c(a+b)$$
$$\mathcal{A}_t = 2(ab+ac+bc)$$
$$\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c$$
$$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Cubul

Paralelipiped dreptunghic cu toate muchiile congruente ($a = b = c = \ell$).

$$\mathcal{A}_\ell = 4\ell^2, \qquad \mathcal{A}_t = 6\ell^2$$
$$\mathcal{V} = \ell^3, \qquad d = \ell\sqrt{3}$$

Diagonala unei fețe: $d_{\text{față}} = \ell\sqrt{2}$.

Prisme regulate uzuale

Prisma	Aria bazei	Perimetrul bazei
Triunghiulară regulată	$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$	3ℓ
Patrulateră regulată	ℓ^2	4ℓ
Hexagonală regulată	$\frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$	6ℓ

CORPURI GEOMETRICE · CLASA A VIII-A

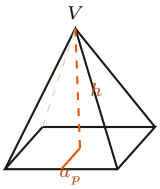
Piramida

Elemente, apotemă, arii, volum, tetraedrul regulat

Fișa 41

Piramida regulată

Piramida are ca bază un poligon, iar fețele laterale sunt triunghiuri cu vârful comun V. Este **regulată** dacă baza este poligon regulat și înălțimea cade în centrul bazei; atunci muchiile laterale sunt congruente și fețele laterale sunt triunghiuri isoscele congruente.



Înălțimea h	VO, unde O = centrul bazei
Apotema piramidei a_p	înălțimea unei fețe laterale (din V pe muchia bazei)
Apotema bazei a_b	distanța de la O la o latură a bazei
Relația fundamentală	$a_p^2 = h^2 + a_b^2$ (triunghi dreptunghic)
Muchia laterală m	$m^2 = h^2 + R^2$, R = raza cercului circumscris bazei

Arii și volum

$$\mathcal{A}_\ell = \frac{P_{\text{bazei}} \cdot a_p}{2}, \qquad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_{\text{bazei}}, \qquad \mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_{\text{bazei}} \cdot h}{3}$$

UNGHIURI CARACTERISTICE

Unghiul dintre o **muchie laterală** și planul bazei: în triunghiul VOA ($\text{tg} = \dfrac{h}{R}$).

Unghiul dintre o **față laterală** și planul bazei: în triunghiul VOM ($\text{tg} = \dfrac{h}{a_b}$), unde M = mijlocul unei laturi a bazei.

Tetraedrul regulat

Piramida triunghiulară regulată cu **toate** muchiile congruente (ℓ).

$$\mathcal{A}_\ell = 3 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}, \qquad \mathcal{A}_t = \ell^2\sqrt{3}$$

$$h = \frac{\ell\sqrt{6}}{3}, \qquad \mathcal{V} = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}$$

CORPURI GEOMETRICE · CLASA A VIII-A

Trunchiul de piramidă

Secțiuni paralele cu baza, arii, volum

Fișa 42

Definiție

Trunchiul de piramidă se obține secționând o piramidă cu un plan paralel cu baza și îndepărtând piramida mică formată la vârf. Are două baze paralele și asemenea, iar fețele laterale sunt trapeze.

Secțiuni paralele cu baza

Dacă un plan paralel cu baza taie piramida la distanța corespunzătoare unui raport k, atunci:

$$\frac{\ell_{\text{mică}}}{\ell_{\text{mare}}} = \frac{h_{\text{mică}}}{h_{\text{mare}}} = \frac{m_{\text{mică}}}{m_{\text{mare}}} = k, \qquad \frac{\mathcal{A}_{\text{mică}}}{\mathcal{A}_{\text{mare}}} = k^2, \qquad \frac{\mathcal{V}_{\text{mică}}}{\mathcal{V}_{\text{mare}}} = k^3$$

Piramida mică este **asemenea** cu piramida inițială.

Trunchiul de piramidă regulată — formule

Notăm: $\mathcal{A}_B$ = aria bazei mari, $\mathcal{A}_b$ = aria bazei mici, P_B, P_b = perimetrele bazelor, a_p = apotema trunchiului, h = înălțimea.

$$\mathcal{A}_\ell = \frac{(P_B + P_b)\cdot a_p}{2}, \qquad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$$

$$\mathcal{V} = \frac{h}{3}\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b}\right)$$

Relații metrice în trunchi

Apotema trunchiului	$a_p^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2$, unde a_B, a_b = apotemele bazelor
Muchia laterală	$m^2 = h^2 + (R_B - R_b)^2$
Fața laterală	este un trapez isoscel cu bazele ℓ_B și ℓ_b și înălțimea a_p

METODĂ Multe probleme cu trunchiul se rezolvă mai simplu **completând** trunchiul până la piramida întreagă și folosind raportul de asemănare k. Volumul trunchiului $= \mathcal{V}_{\text{piramidă mare}} - \mathcal{V}_{\text{piramidă mică}}$.

CORPURI GEOMETRICE · CLASA A VIII-A

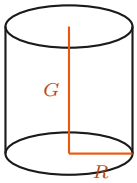
Cilindrul circular drept

Desfășurare, secțiuni, arii, volum

Fișa 43

Elemente

Cilindrul circular drept se obține prin rotirea unui dreptunghi în jurul uneia dintre laturi.



Bazele	două discuri congruente și paralele, de rază R
Generatoarea G	segmentul care unește două puncte corespunzătoare ale cercurilor de bază
Înălțimea H	la cilindrul **drept**, $H = G$
Axa de rotație	dreapta care unește centrele bazelor

Desfășurarea suprafeței laterale

Desfășurata suprafeței laterale este un **dreptunghi** cu dimensiunile $2\pi R$ (lungimea cercului de bază) și G.

$$\mathcal{A}_\ell = 2\pi R \cdot G, \qquad \mathcal{A}_{\text{bazei}} = \pi R^2, \qquad \mathcal{A}_t = 2\pi R(G + R), \qquad \mathcal{V} = \pi R^2 H$$

Secțiuni în cilindru

Secțiune axială	planul conține axa; este un **dreptunghi** cu dimensiunile $2R$ și G; aria $= 2RG$
Secțiune paralelă cu baza	este un **cerc** congruent cu cercul de bază
Cilindru echilateral	$G = 2R$; secțiunea axială este un **pătrat**

CORPURI GEOMETRICE · CLASA A VIII-A

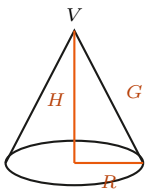
Conul circular drept

Desfășurare, secțiuni, arii, volum

Fișa 44

Elemente

Conul circular drept se obține prin rotirea unui triunghi dreptunghic în jurul uneia dintre catete.



$G^2 = R^2 + H^2$ (teorema lui Pitagora în triunghiul axial)

Desfășurarea și formulele

Desfășurata suprafeței laterale este un **sector de cerc** de rază G și unghi la centru

$$\alpha^\circ = \frac{360^\circ \cdot R}{G}$$

$$\mathcal{A}_\ell = \pi RG, \qquad \mathcal{A}_{\text{bazei}} = \pi R^2, \qquad \mathcal{A}_t = \pi R(G+R), \qquad \mathcal{V} = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

Secțiuni în con

Secțiune axială	**triunghi isoscel** cu laturile G, G și baza $2R$; aria $= R \cdot H$
Secțiune paralelă cu baza	**cerc**; conul mic este asemenea cu conul mare
Con echilateral	$G = 2R$; secțiunea axială este un triunghi **echilateral**

Pentru o secțiune paralelă cu baza, cu raportul de asemănare k:

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} = \frac{g}{G} = k, \qquad \frac{\mathcal{A}_{\ell\,\text{mic}}}{\mathcal{A}_{\ell\,\text{mare}}} = k^2, \qquad \frac{\mathcal{V}_{\text{mic}}}{\mathcal{V}_{\text{mare}}} = k^3$$

Trunchiul de con circular drept

$$G_1^2 = H_1^2 + (R-r)^2$$

$$\mathcal{A}_\ell = \pi G_1(R+r), \qquad \mathcal{A}_t = \pi[G_1(R+r) + R^2 + r^2], \qquad \mathcal{V} = \frac{\pi H_1}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$$

CORPURI GEOMETRICE · CLASA A VIII-A

Sfera

Elemente, arie, volum, secțiuni

Fișa 45

Definiții

Sfera $S(O, R)$	mulțimea punctelor din spațiu situate la distanța R față de punctul fix O
Corpul sferic (bila)	sfera împreună cu interiorul ei
Raza	segmentul care unește centrul cu un punct al sferei
Diametrul	$d = 2R$; coarda care trece prin centru
Cerc mare	secțiunea prin planul care trece prin centru; are raza R

Arie și volum

$$\mathcal{A}_{\text{sferă}} = 4\pi R^2 \qquad \mathcal{V}_{\text{sferă}} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Aria sferei este egală cu aria laterală a cilindrului circumscris ei, iar volumul sferei este $\frac{2}{3}$ din volumul acelui cilindru.

Poziția unui plan față de sferă

Fie $d = d(O, \alpha)$ distanța de la centru la plan.

$d > R$	$d = R$	$d < R$
plan **exterior**: nu are puncte comune	plan **tangent**: un singur punct comun	plan **secant**: secțiunea este un cerc de rază $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

Sfera înscrisă și sfera circumscrisă

Sfera circumscrisă unui cub	$R = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ (jumătate din diagonala cubului)
Sfera înscrisă într-un cub	$r = \frac{\ell}{2}$
Sfera circumscrisă unui paralelipiped	$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$

CORPURI GEOMETRICE · CLASA A VIII-A

Arii și volume — tabel de sinteză

Toate corpurile studiate în gimnaziu

Fișa 46

Tabelul complet

Corpul	Aria laterală	Aria totală	Volumul
Cub (ℓ)	$4\ell^2$	$6\ell^2$	ℓ^3
Paralelipiped (a, b, c)	$2c(a+b)$	$2(ab+ac+bc)$	abc
Prismă dreaptă	$P_b \cdot h$	$\mathcal{A}_\ell + 2\mathcal{A}_b$	$\mathcal{A}_b \cdot h$
Piramidă regulată	$\frac{P_b \cdot a_p}{2}$	$\mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_b$	$\frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3}$
Trunchi de piramidă	$\frac{(P_B + P_b)a_p}{2}$	$\mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$	$\frac{h}{3}\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \mathcal{A}_b}\right)$
Cilindru (R, G)	$2\pi RG$	$2\pi R(G+R)$	$\pi R^2 H$
Con (R, G)	πRG	$\pi R(G+R)$	$\frac{\pi R^2 H}{3}$
Trunchi de con	$\pi G_1(R+r)$	$\pi[G_1(R+r) + R^2 + r^2]$	$\frac{\pi H_1}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$
Sferă (R)	—	$4\pi R^2$	$\frac{4\pi R^3}{3}$

Relații de verificare rapidă

- piramida și conul: volumul este $\frac{1}{3}$ din al prismei/-cilindrului cu aceeași bază și înălțime;
- corpuri asemenea cu raportul k: ariile în raportul k^2, volumele în raportul k^3;
- toate formulele de volum au dimensiunea lungime^3, iar cele de arie lungime^2 — verificare utilă;
- la con și cilindru, G apare doar în arii, H doar în volume.

MĂSURARE · CLASELE V–VIII

Unități de măsură

Lungime, arie, volum, capacitate, masă, timp

Fișa 47

Transformări

Mărimea	Unitatea principală	Raport între unități consecutive
Lungime	metrul (m)	$\times 10$ / $: 10$ (mm, cm, dm, m, dam, hm, km)
Arie	metrul pătrat (m^2)	$\times 100$ / $: 100$
Volum	metrul cub (m^3)	$\times 1000$ / $: 1000$
Capacitate	litrul (ℓ)	$\times 10$ / $: 10$
Masă	kilogramul (kg)	$\times 10$ / $: 10$

Echivalențe de reținut

- 1 dm^3 $= 1\ \ell$; 1 cm^3 $= 1$ mℓ; 1 m^3 $= 1000\ \ell$;
- 1 ar $= 100$ m^2; 1 ha $= 100$ ari $= 10\,000$ m^2;
- 1 km^2 $= 100$ ha $= 1\,000\,000$ m^2;
- 1 t $= 1000$ kg; 1 q $= 100$ kg; 1 kg $= 1000$ g;
- 1 min $= 60$ s; 1 h $= 60$ min $= 3600$ s; 1 zi $= 24$ h;
- unghiuri: $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

Mărimi derivate

Viteza	$v = \frac{d}{t}$; unități: m/s, km/h; 1 m/s $= 3{,}6$ km/h
Densitatea	$\rho = \frac{m}{V}$; unități: kg/m^3, g/cm^3
Debitul	$Q = \frac{V}{t}$; unități: ℓ/s, m^3/h

ATENȚIE La transformarea unităților de **arie** raportul este 100, iar la cele de **volum** este 1000 — nu 10. De exemplu 1 m^2 $= 100$ dm^2, dar 1 m^3 $= 1000$ dm^3. Este una dintre cele mai frecvente greșeli la Evaluarea Națională.

ANEXĂ · EXAMEN

Greșeli frecvente

Ce văd cel mai des la corectarea lucrărilor

Fișa 48

Algebră — greșit / corect

Greșit	Corect
$(a+b)^2 = a^2+b^2$	$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
$\sqrt{a^2+b^2} = a+b$	nu se simplifică; $\sqrt{a^2} = \lvert a\rvert$
$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{a+b}$	radicalii se adună doar dacă sunt **asemenea**
$\frac{a+b}{a} = b$	$\frac{a+b}{a} = 1+\frac{b}{a}$; simplificarea se face doar prin **factori**
$-2x > 6 \Rightarrow x > -3$	$-2x > 6 \Rightarrow x < -3$ (sensul se schimbă)
$2^3 \cdot 2^4 = 2^{12}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$ (exponenții se adună)
$(-2)^2 = -4$	$(-2)^2 = 4$; $-2^2 = -4$
scrierea soluției fără condiții de existență	se pun întâi condițiile, apoi se rezolvă

Geometrie — greșit / corect

Greșit	Corect
aplicarea lui Pitagora într-un triunghi oarecare	se aplică **numai** în triunghiul dreptunghic
confundarea apotemei bazei cu apotema piramidei	$a_p^2 = h^2 + a_b^2$ — sunt mărimi diferite
$1\ \text{m}^2 = 10\ \text{dm}^2$	$1\ \text{m}^2 = 100\ \text{dm}^2$
$1\ \text{m}^3 = 100\ \text{dm}^3$	$1\ \text{m}^3 = 1000\ \text{dm}^3$
raportul ariilor $= k$ la figuri asemenea	raportul ariilor $= k^2$, al volumelor $= k^3$
folosirea generatoarei în formula volumului conului	$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 H}{3}$ — cu **înălțimea**, nu cu G
demonstrarea perpendicularității pe o singură dreaptă din plan	sunt necesare **două drepte concurente** din plan
rezolvarea fără figură	figura corectă se punctează și orientează raționamentul

CEL MAI IMPORTANT SFAT Majoritatea punctelor pierdute la Evaluarea Națională nu vin din necunoașterea teoriei, ci din **redactarea incompletă**: pași săriţi, teoreme neinvocate, unități lipsă. Scrie ca și cum cel care corectează nu poate ghici ce ai gândit — pentru că exact așa este.

ANEXĂ

Notații și simboluri

Dicționar rapid de simboluri matematice

Fișa 49

Simboluri generale

$\in$	aparține	$\notin$	nu aparține
$\subset$	este inclus în	$\emptyset$	mulțimea vidă
$\cup$	reuniune	$\cap$	intersecție
$\setminus$	diferență de mulțimi	$\times$	produs cartezian
$\forall$	pentru orice	$\exists$	există
$\Rightarrow$	implică	$\Longleftrightarrow$	echivalent cu
$\mid$	divide	$:$	se divide cu
(a, b)	c.m.m.d.c.	$[a, b]$	c.m.m.m.c.
$\lvert a\rvert$	modulul lui a	$[x]$	partea întreagă
$\{x\}$	partea fracționară	$\text{card}(A)$	numărul de elemente

Simboluri de geometrie

$[AB]$	segmentul AB	AB	lungimea segmentului
$[AB$	semidreapta	AB	dreapta AB
$\parallel$	paralel cu	$\perp$	perpendicular pe
$\equiv$	congruent cu	$\sim$	asemenea cu
$\sphericalangle ABC$	unghiul ABC	$\overset{\frown}{AB}$	arcul AB
$\triangle ABC$	triunghiul ABC	$\mathcal{C}(O, r)$	cercul de centru O și rază r
$d(A, B)$	distanța	$\text{pr}_{\alpha}A$	proiecția lui A pe α
$\mathcal{A}$	aria	$\mathcal{V}$	volumul
$\mathcal{A}_{\ell}$	aria laterală	$\mathcal{A}_{t}$	aria totală
P	perimetrul	p	semiperimetrul

Litere folosite prin convenție

- a, b, c — laturile triunghiului, opuse vârfurilor A, B, C;
- h — înălțimea; m — mediana; ℓ — latura;
- R — raza cercului circumscris; r — raza cercului înscris;
- G — generatoarea (la con și cilindru) sau centrul de greutate;
- H — înălțimea corpului sau ortocentrul;
- B și b — bazele trapezului sau ale trunchiului.

CENTRUL EDUCAȚIONAL

Math Academy®

Despre această lucrare

Broșura de față sintetizează întreaga teorie de matematică de gimnaziu necesară la Evaluarea Națională, organizată pe fișe — câte un capitol pe pagină. Este gândită pentru recapitulare rapidă: definiții, proprietăți, formule și metode de lucru, fără exemple rezolvate. Materialul este completat de culegerea **„Formule esențiale de matematică”**, care conține aceleași noțiuni însoțite de exemple rezolvate pas cu pas.

Despre autor

prof. Andrei Octavian Dobre — profesor de matematică, gradul didactic I, evaluator național pentru Evaluarea Națională și Bacalaureat, Global Math Ambassador, coordonator al Centrului Educațional Math Academy® din Ploiești și autor de culegeri de matematică.

Cum lucrăm la Math Academy®

- ședințe **online live**, în grupe de maximum 7 elevi;
- platforma proprie **AcadMath®**, cu teme, fișe și evidența progresului;
- **înregistrarea lecțiilor**, accesibilă elevilor care lipsesc;
- pregătire pentru Evaluarea Națională, Bacalaureat și olimpiade, clasele V–XII;
- prima ședință este **gratuită**.

academiademate.ro

Drepturi de autor și distribuire

Această lucrare poate fi distribuită numai cu acordul scris al autorului, prof. Andrei Octavian Dobre.

Reproducerea integrală sau parțială, prin orice mijloace — tipărire, fotocopiere, scanare, publicare online sau redistribuire în format electronic — fără acest acord scris, este interzisă.

© 2026 Centrul Educațional Math Academy® — academiademate.ro. Toate drepturile rezervate.