Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. ianuarie 2010

# BREVIAR TEORETIC CU EXEMPLE CONCRETE, PENTRU PREGĂTIREA EXAMENULUI DE EVALUARE NAȚIONALĂ, clasa a VIII-a - 2010

**Propunător: Prof. IGNĂTESCU VIOREL OVIDIU**

**Şcoala cu clasele I-VIII Măteşti, com. Săpoca, jud. Buzău**

## I. MULȚIMI

### I.1 MULȚIMI; RELAȚII

**Mulțimea** e un ansamblu de obiecte, numite elemente, grupate fie prin indicarea tuturor elementelor, fie prin formularea unor proprietăți caracteristice lor şi numai lor.

Exemple:

1. C = {mulțimea caietelor şcolare}
2. M= {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
3. E= {e, l, v elementele cuvântului elev}
4. D = {x/x este elev în clasa a VIII a}

Observație: un element într-o mulțime apare numai o singură dată.

Exemple:

1. $9 \in M; 12 \notin M$ se citeşte 9 **aparține** mulțimii M, respectiv 12 **nu aparține** mulțimii M
2. $e \in E, a \notin E$
3. $B = \{x / x \in N, x \leq 3\}$

Mulțimea care nu are nici un element se numeşte **mulțimea vidă**. Mulțimea vidă este notată cu Ø.

Observație. Există o singură mulțime vidă.

O mulțime A este **inclusă** într-o mulțime B dacă şi numai dacă fiecare element al lui A este element şi pentru mulțimea B.

Notație: A⊂B şi se citeşte „A este inclus în B”

$D \not\subset V$, şi citeşte „D nu este inclus în V”

O mulțime A este **submulțime** a mulțimii B dacă toate elementele lui A sunt şi în B, sau altfel A este inclus în B.

Mulțimea Ø este submulțime pentru oricare mulțime .

Exemple $P = \{1,2,3,4\}$; $Q = \{1,2,3\}$ $Q \subseteq P$

Două **mulțimi** sunt **egale** dacă au aceleaşi elemente.

Notație: $A = B$

### I.2 OPERAȚII CU MULȚIMI

Intersecția

Mulțimea elementelor comune mulțimilor A şi B (fiecare element comun mulțimilor A şi B figurând o singură dată) se numeşte **intersecția** mulțimilor A şi B.

Astfel: $A \cap B = \{x / x \in A$ şi $x \in B\}$

Notație: $A \cap B$, și se citește „intersecția mulțimilor A și B”.
Exemple: $A = \{1,3,5,\}$ iar $B = \{1,2,5\}$ atunci $A \cap B = \{1,5\}$ (se iau elementele comune o singură dată).

Două **mulțimi** sunt **disjuncte** dacă intersecția lor este mulțimea vidă.
Exemple: $P = \{2,8,7\}$ iar $Q = \{1,3,5\}$ $P \cap Q = \phi$

Reuniunea

Mulțimea în care se află toate elementele mulțimilor A și B, și numai ale lor (fiecare element comun mulțimilor figurând o singură dată), se numește **reuniunea** mulțimilor A și B.
Astfel: $A \cup B = \{x / x \in A$ sau $x \in B\}$
Notație: se citește „reuniunea mulțimilor A și B”.
Exemple: $A = \{1,3,5\}$ iar $B = 1,2,5\}$ atunci $A \cup B = \{1,2,3,5,\}$ (se iau toate elementele o singură dată).

Diferența

Mulțimea elementelor care aparțin mulțimii A, dar care nu aparțin mulțimii B, se numește **diferența** dintre mulțimile A și B.
Astfel: $A - B = \{x / x \in A$ și $x \notin B\}$
Notație: $A - B$ sau A\B și se numește „diferența mulțimilor A și B”.
Exemple: $A = \{1,3,5\}$ iar $B = \{1,2,5\}$ atunci $A - B = \{3\}$.

### I.3 MULȚIMI FINITE, MULȚIMI INFINITE

Observăm că există mulțimi vide și mulțimi cu un număr finit de elemente, numite **mulțimi finite**.

**Cardinalul** unei mulțimi finite este numărul finit de elemente, numite mulțimi finite.
Exemple:

1. $A = \{2,4,6,8,\}$, vom scrie card $A = 4$
2. Dacă $A = \phi$, vom scrie card $A = 0$

O **mulțime infinită** este o mulțime pentru care șirul elementelor este nesfârșit.
Exemple:

$\mathbb{N}$ – mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$={0, 1, 2, 4, ...........}

$\mathbb{N}^*$ - mulțimea numerelor naturale nenule $\mathbb{N}^*$={ 1, 2, 4, ...........}

$\mathbb{Z}$ – mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{....,-2,-1,0,1,2,......\}$

$\mathbb{Q}$– mulțimea numerelor raționale (care pot fi scrise sub formă de fracție)

$\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale

Observație. Între mulțimile de mai sus, există relația: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

### I.4 PROPOZIȚII

Un element a cărei valoare de adevăr este bazat pe reguli explicit exprimate se numește **propoziție**.

O propoziție se numește **propoziție adevărată** dacă ea exprimă un adevăr.
Exemple:
Orașul Nehoiu se află în județul Buzău.
5X3=15

O **propoziție** se numește **falsă** dacă ea exprimă un neadevăr.
Exemple:
Municipiul Buzău este în Africa.
12 : 2 = 7
Notație: Cu A se notează o propoziție adevărată, iar cu F se notează o propoziție falsă și se spune că **valoarea logică** sau **valoarea de adevăr** a unei propoziții este A sau F.

Operația de schimbare a valorii de adevăr a unei propoziții se numește **negarea** propoziției.

Exemple:
Oraşul Nehoiu nu se află în judeţul Buzău. (F)
$5 \cdot 3 \neq 15$ (F)
Municipiul Buzău nu este în Africa. (A)

## I.5 MULŢIMEA NUMERELOR NATURALE

**Numerele naturale** sunt reprezentate prin cifre sub forma următorului şir: 0,1,2,3, ......., 10,11, .......
Observaţie: Semnul „......”, indică faptul că am omis să scriem unele numere naturale. Nu putem scrie toate numerele naturale, după un număr natural urmează încă unul şi aşa mai departe.
Proprietate: Şirul numerelor naturale este infinit.
Observaţie: Numerele naturale se pot reprezenta pe o dreaptă.
O dreaptă pe care am fixat o origine, un sens şi o măsură, se numeşte **axa numerelor**.

### I.5.1 Inegalitatea dintre numerele naturale

Vom spune că un număr natural a **este mai mare decât** un număr natural b şi vom scrie ***a* > *b*,** dacă există un număr natural c, diferit de numărul 0, astfel încât să avem $a = b + c$. Acest lucru se mai numeşte şi **inegalitate strictă**. Dacă avem două numere naturale a , b şi dorim a indica faptul că ‚a mai mare sau egal cu b’scriem $a \geq b$şi citim „a este mai mare sau egal cu b”. Acest lucru se mai numeşte inegalitate nestrictă.
Exemple:
2 mai mare ca 1, deoarece există c=1 care adunat cu 1 să fie egal cu 2.
Criterii de inegalitate a numerelor naturale:
1. Este mai mare numărul în care o cifră este mai mare decât cifra de acelaşi ordin din cel de-al doilea număr, cifrele de ordine superioară fiind egale două câte două.
2. Dintre două numere naturale, care au acelaşi număr de cifre, este mai mare acela care are mai multe cifre.

### I.5.2 Scrierea numerelor naturale în baza 10

Orice număr natural admite o **descompunere în baza 10**.
Exemple:
$$5307 = 5000 + 300 + 7$$
$$= 5 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 7 =$$
$$= 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$
În general, numărul $\overline{abcd}$, unde a, b, c, d, sunt cifre, cu $a \neq 0$, se scrie sub următoarea formă:
$$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d \cdot 10^0$$
Membrul stâng al egalităţii de mai sus reprezintă scrierea unui număr natural în baza zece, iar membrul drept, scrierea aceluiaşi număr sub formă zecimală desfăşurată.

### I.5.3 Operaţii cu numere naturale

Adunarea

Prin **suma** a două numere naturale a şi b numite **termenii** sumei se obţine al treilea număr natural notat $s = a + b$.
Proprietăţile adunării numerelor naturale:
1. Oricare ar fi numerele naturale a şi b avem: $a + b = b + a$ (**comutativitatea** adunării).
2. Oricare ar fi numerele a, b, şi c avem: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (**asociativitatea** adunării).

3. există numărul natural 0 numit **element neutru** care nu modifică prin adunare valoarea oricărui număr natural.

Scăderea

Dacă a şi b sunt două numere naturale, astfel încât $a \geq b$, **diferența** dintre a şi b, notată prin $a-b$, este acel număr natural c, pentru care $a=b+c$. Termenul a se numeşte **descăzut** iar b se numeşte **scăzător**.

Înmulțirea

**Produsul** unui număr natural, diferit de 0 şi de 1, se exprimă printr-o sumă în care primul apare ca termen de atâtea ori de câte ori arată al doilea număr natural.

Excepții:
1. Produsul unui număr natural 0 este 0.
2. Produsul unui număr natural cu 1 este numărul natural considerat.

Proprietățile înmulțirii numerelor naturale:
1. Oricare ar fi numerele naturale a şi b avem:
   $a \cdot b = b \cdot a$ **comutativitatea** înmulțirii
2. Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c avem:
   $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ **asociativitatea** înmulțirii
3. Există numărul natural 1 numit **element neutru** care nu modifică prin înmulțire valoarea oricărui număr natural
4. oricare ar fi numerele a, b şi c avem: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ **distributivitatea înmulțirii față de adunare**.

   Exemplu: $2 \cdot (3+4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$
5. Oricare ar fi numerele a, b şi c avem: $a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$ **distributivitatea înmulțirii față de scădere**

Împărțirea

Operația inversă a înmulțirii, când se cunoaşte produsul şi trebuie aflat unul din factori e **împărțirea**. Semnul operației este „:”

Exemplu:

| **Deîmpărțit** | | **Împărțitor** | | **Cât** |
|---|---|---|---|---|
| 12 | : | 3 | = | 4 |

Observații:
1. Împărțirea nu are totdeauna rezultat în mulțimea numerelor naturale

   Exemplu: 7 nu se poate împărți exact la 3 (nu există $n \in N$ a.î $3 \cdot n = 7$)
2. **Împărțirea cu 0 nu este posibilă** deoarece nu există nici un număr natural care, înmulțit cu 0 să dea un număr diferit de 0.
3. Câtul dintre 0 şi un număr natural a, diferit de 0, este 0.

**Teorema împărțirii cu rest a numerelor naturale** Oricare ar fi numerele naturale a şi b, cu $b \neq 0$, există şi sunt unice două numere naturale q şi r astfel încât $a = b \cdot q + r$, unde $r < b$.

**Puterea** unui număr natural

Dacă a şi n sunt numere naturale, unde n este diferit de 0 şi 1; atunci:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a..........a}_{\text{n factori}}$$

în care se numeşte **baza** puterii, iar n se numeşte **exponentul** puterii.
Exemplu: $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
Excepţii:
1. orice număr natural ridicat la puterea 0 este 1
2. orice număr natural ridicat la puterea 1 este numărul însuşi.

Proprietăţile puterii numerelor naturale:
Dacă a, m, n sunt numere naturale, atunci:
1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
3. $a^m : a^n = a^{m-n}$

I.5.4 Divizibilitatea numerelor naturale

Un număr natural a este **divizibil** cu un număr natural $b \neq 0$ dacă există un număr natural c, astfel ca $a = b - c$. Se mai spune că „a se divide cu b", „b se divide pe a" sau că „a este multiplu al lui b".
Notaţie:
$b / a$ şi se citeşte „b divide pe a"
$a : b$ şi se citeşte „a este divizibil cu b"
Exemplu: 6 este divizibil cu 2, pentru că există 3 astfel încât $6 = 2 \cdot 3$

Toţi divizorii unui număr natural poartă denumirea de **mulţimea divizorilor** acelui număr natural.
Exemplu: Fie $n = 12$ $D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$
Observaţie: Orice număr natural m are **divizori improprii** 1 şi m. Orice alt divizor este numit **divizor propriu**.
Proprietăţile ale divizibilităţii numerelor naturale
1. Orice număr natural este divizibil cu 1. Astfel: $1/a$ oricare ar fi a$\in\mathbb{N}$
2. 0 este divizibil cu orice număr. Astfel: $a/0$, oricare ar fi a$\in\mathbb{N}$
3. Orice număr natural se divide cu el însuşi. Astfel: $a/a$ oricare ar fi a$\in\mathbb{N}$
4. Fie a şi b două numere naturale. Dacă a este divizibil cu b şi b este divizibil cu a, atunci $a = b$

Astfel: dacă $a/b$ şi $b/a$, atunci $a = b$ oricare ar fi $a, b \in \mathbb{N}$

5. Fie a, b, c trei numere naturale. Dacă b se divide cu a, iar c se divide cu b atunci c se divide cu a.

Astfel: dacă $a/b$ şi $b/c$, atunci $a/c$ oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$

Exemplu: $2/6$ şi $6/12$, atunci $2/12$

6. Dacă un număr natural se divide cu un număr natural, atunci primul se divide cu toţi divizorii celui de-al doilea.

Exemplu: Numărul 24 se divide cu toţi divizorii lui 12 adică 1,2,3,4,6,12

7. Dacă fiecare termen al unei sume de două numere naturale se divide cu un număr natural, atunci şi suma lor se divide cu acel număr natural. Dacă: $m/a$ şi $m/b$, atunci $m/(a+b)$, oricare ar fi $a, b, m \in \mathbb{N}$

Exemple: 12 se divide cu 3; 15 se divide cu 3
$12 + 15 = 27$ iar 27 se divide cu 3

8. Dacă unul dintre termenii unei sume de două numere naturale se divide cu un singur număr natural, iar celălalt termen m se divide cu acel număr natural, atunci suma nu se divide cu acel număr natural.

9. Fie a, b, m numere naturale, $a \geq b$. Dacă a se divide cu m şi b se divide cu m, atunci şi $a-b$ se divide cu m. Astfel:

   Dacă $m/a$ şi $m/b$, atunci $m/(a-b)$ oricare ar fi $a,b,m \in \mathbb{N}$, $a \geq b$

   Exemplu: Fie diferenţa $10-4$, $10 \geq 4$, 10 se divide cu 2, 4 se divide cu 2. Diferenţa $10-4=6$ se divide cu 2.
10. Dacă un număr natural a se divide cu un număr natural m, atunci produsul lui a cu orice număr natural se divide cu m.

Astfel: Dacă $m/a$, atunci $m/ab$, oricare ar fi $a,b.m \in \mathbb{N}$

Exemple: 6 se divide cu 2 $6 \cdot 7 = 42$ se divide cu 2

I.5.5 Criterii de divizibilitate

**1. Criteriul de divizibilitate cu 10**

- Un număr natural care are ultima cifră egală cu 0, se divide cu 10
- Un număr natural care are ca ultima sa cifră pe 0, se divide cu 2 şi 5

Exemple: 130 se divide cu 10 $130 \cdot 10 = 130$, deci se divide cu 2 şi 5; $65 \cdot 2 = 130$; $26 \cdot 5 = 130$

**2. Criteriul de divizibilitate cu 2**

- Dacă ultima cifră a unui număr natural este o cifră pară, atunci acel număr se divide cu 2.

Exemplu: 220, 222, 224, 226, 228, se divid cu 2, deoarece au fiecare ultima cifră pară: 0, 2, 4, 6, 8.

3. **Criteriul de divizibilitate cu 5**.

- Dacă ultima cifră a unui număr natural este 5 sau 0, atunci acel număr se divide cu 5.

Exemplu: 435 se divide cu 5; 190 se divide cu 5.

4. **Criteriul de divizibilitate cu 4**.

- Dacă numărul format din ultimele două cifre ale unui număr natural este divizibil cu 4, atunci numărul considerat este divizibil cu 4

Exemplu: 224 se divide cu 4 deoarece 24 se divide cu 4

**5. Criteriul de divizibilitate cu 25**

- Dacă numărul natural format din ultimele două cifre ale unui număr natural este divizibil cu 25, atunci numărul considerat este divizibil cu 25.

Exemplu: 225 se divide cu 25, deoarece 25 se divide cu 25.

**6. Criteriul de divizibilitate cu 3**

- Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 3, atunci acel număr este divizibil cu 3.

Exemplu: Numărul 47193 este divizibil cu 3, deoarece 4+7+1+9+3=24 şi $3/24$

**7. Criteriul de divizibilitate cu 9**

- Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 9, atunci acel număr e divizibil cu 9

Exemplu: numărul 47160 este divizibil cu 9 deoarece 4+7+1+9+3=18, care se divide cu 9.

I.5.6 Numere prime

Se numeşte **număr prim** orice număr natural , diferit de 1, care are divizori numai pe 1 şi pe el însuşi.

Astfel: Se numeşte număr prim acel număr natural care are numai doi divizori.

De aici: Se numeşte **număr compus** numărul cu cel puţin 3 divizori.

Observaţie: Numărul 1 nu admite decât un singur divizor, deci el nu este nici prim şi nici număr compus.

Algoritm pentru a stabili dacă un număr este prim sau nu:

1. Împărţim numărul pe rând, la toate numerele prime în ordine crescătoare începând cu 2, până obţinem un cât mai mic sau egal cu împărţitorul. Dacă numărul se divide cu unul din aceste numere prime, este evident că el nu este prim.

**Tabel cu numere prime până la 1000**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 61 | 149 | 239 | 347 | 443 | 563 | 659 | 773 | 887 |
| 3 | 67 | 151 | 241 | 349 | 449 | 569 | 661 | 787 | 907 |
| 5 | 71 | 157 | 251 | 353 | 457 | 571 | 673 | 797 | 911 |
| 7 | 73 | 163 | 257 | 359 | 461 | 567 | 677 | 809 | 919 |
| 11 | 79 | 167 | 263 | 367 | 463 | 583 | 683 | 811 | 929 |
| 13 | 83 | 173 | 269 | 373 | 467 | 593 | 691 | 821 | 937 |
| 17 | 89 | 179 | 271 | 379 | 479 | 599 | 701 | 823 | 941 |
| 19 | 97 | 181 | 277 | 383 | 487 | 601 | 709 | 827 | 947 |
| 23 | 101 | 191 | 281 | 389 | 491 | 607 | 719 | 829 | 953 |
| 29 | 103 | 193 | 283 | 397 | 499 | 613 | 727 | 839 | 967 |
| 31 | 107 | 197 | 293 | 401 | 503 | 617 | 733 | 853 | 971 |
| 37 | 109 | 199 | 307 | 409 | 509 | 619 | 739 | 857 | 977 |
| 41 | 113 | 211 | 311 | 419 | 521 | 631 | 743 | 859 | 983 |
| 43 | 127 | 223 | 313 | 421 | 523 | 641 | 751 | 863 | 991 |
| 47 | 131 | 227 | 317 | 431 | 541 | 643 | 757 | 877 | 997 |
| 53 | 137 | 229 | 331 | 433 | 547 | 647 | 761 | 881 | - |
| 59 | 139 | 233 | 337 | 439 | 557 | 653 | 769 | 883 | - |

I.5.7 Descompunerea numerelor naturale în factori primi (C.m.m.d.c. şi C.m.m.m.c.)

**A descompune** un număr natural în factori primi înseamnă a scrie acel număr ca produs de puteri ale căror baze sunt numere prime distincte.

De obicei, factorii se scriu în ordinea crescătoare a bazelor. Această scriere este unică.

Exemplu: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

**Cel mai mare divizor comun** al numerelor naturale a şi b, nu ambele nule este numărul natural care:

1. divide pe a şi pe b şi
2. este divizibil cu orice număr ce divide pe a şi pe b.

Acesta se notează cu (a; b).

Pentru a afla c m m d c al mai multor numere procedăm astfel:

- descompunem numerele în factori primi
- facem produsul factorilor primi comuni tuturor numerelor, cu exponenții cei mai mici şi am obținut c m m d c.

Observație: Dacă două sau mai multe numere naturale au c m m d c egal cu 1, atunci ele se numesc numere prime între ele.

Exemplu: (360; 2100; 1980) = ?

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$2100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$
$$1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$
$$360;2100;1980 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

$(6;15;10) = 1$ deci $(6;15) = 3$ $(15;10) = 5$ şi $(6;10) = 2$

**Cel mai mic multiplu comun** al numerelor naturale a şi b este numărul natural care:

1. este multiplu al lui a şi al lui b şi
2. divide orice alt multiplu al numerelor a şi b

C.m.m.m.c. al numerelor naturale a şi b se notează $[a;b]$

Observație: $[a;0] = 0$, oricare ar fi numărul natural a

Exemple: $[3;5] = 15$, $[6;2] = 6$, $[8;14] = 56$

Pentru a afla c.m.m.m.c. al mai multor numere procedăm astfel:

- descompunem numerele date în factori primi
- luăm toți factorii primi o singură dată, cu exponenții cei mai mari care apar în descompuneri. Produsul lor este c.m.m.m.c.

## I.6 MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

**Numerele întregi** reprezintă un şir de forma:
....., -11, -10 .., -2, -1, 0, 1, 2, ........, 10, 11, .............
unde prin semnul „-„ am însemnat numerele negative.

Mulțimea numerelor întregi se notează cu ℤ. Evident, ℕ⊂ℤ.

I.6.1 Valoarea absolută: Orice număr negativ (-a) are **valoarea absolută** (**modulul**)a, iar orice număr întreg pozitiv a are valoarea absolută a sau dacă a este 0, atunci modulul este 0.
Astfel:

$$|a| = \begin{cases} a, dacă \quad a \in Z, a \geq 0 \\ -a, daca \quad a \in Z, a < 0 \end{cases}$$

Exemple: $|2| = 2$ $|3| = 3$ $|0| = 0$

1. Modulul unui număr întreg este un număr negativ: $|a| \geq 0$
2. $|-a| \geq |a|$ oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$

I.6.2 Operații cu numere întregi

Adunarea

Fie a, b două numere întregi. Se spune că $S = a + b$ este **suma** celor două numere şi ea este tot un număr întreg.

Valoarea lui S se obține astfel:

Cazul I $a, b \geq 0$, deci termenii sumei sunt numere întregi şi pozitive $S = a + b$, adunându-le şi două numere naturale

Exemple: $2 + 3 = 5$ $4 + 7 = 11$

Cazul II.a, b <0, deci termenii sumei sunt numere negative $3 = -d$ unde $d = |a| + |b|$

Exemplu: $-2 - 3 = -5$ $-4 - 7 - 11$

Cazul III $a \geq 0$, b < 0, deci un termen pozitiv iar celălalt negativ:

Dacă: $|a| = |b|$ atunci $S = 0$

$|a| \neq |b|$, atunci se calculează d ca fiind diferența dintre cel mai mare număr în modul şi cel mai mic iar $s = d$ dacă numărul al cărui modul este mai mare este pozitiv, sau $s = -d$ dacă numărul al cărui modul este mai mare este negativ

Exemple: $-4 + 8 = 4$; $9 - 7 = 2$; $-109 + 11 = -98$ $12 - 23 = -11$

Înmulțirea

Prin **înmulțirea** a două numere întregi a şi b se obține un al treilea număr întreg notat $p = a \cdot b$ sau $p = a \times b$ numit produsul numerelor întregi a şi b.

Semnul numărului $p$ este :

$+$ (plus) dacă numerele $a$ şi $b$ au acelaşi semn

$-$(minus) dacă numerele $a$ şi $b$ au semn contrar

ex:

$(-1) \cdot (-5) = 5$

$(-1) \cdot 5 = -5$

$1 \cdot 5 = 5$

$1\cdot(-5)=-5$

I.6.3. Divizibilitatea la numere întregi

Un număr întreg $a$ este **divizibil** cu un număr întreg $b$ dacă există un număr întreg $c$ astfel încât $a=b\cdot c$.

Obs: în raport cu divizorii unui număr natural se adaugă şi numerele cu semnul $-$(negative).

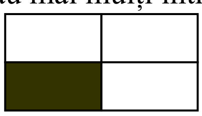
ex: divizorii lui 6 sunt: -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6

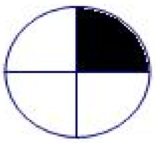
divizorii lui 11 sunt: -11, -1, 1, 11.

## I. 7. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

O **fracție** reprezintă una sau mai multe părți dintre părțile egale în care a fost împărțit un întreg (sau mai mulți întregi identici)

ex: $\frac{1}{4}$ :





O **fracție** se numeşte (sau fracția $\frac{a}{b}$ cu $a\in\mathbb{N}, b\in\mathbb{N}^*$ este):

-**subunitară**, dacă numărătorul e mai mic decât numitorul ($a<b$) ex: $\frac{2}{5}$

-**echiunitară**, dacă numărătorul este egal cu numitorul ($a=b$) ex: $\frac{3}{3}$

-**supraunitară**, dacă numărătorul este mai mare decât numitorul ($a>b$) ex: $\frac{7}{2}$

Fracții echivalente: Fie a, b, c, d$\in\mathbb{Z}$, $b\neq 0, d\neq 0$. Fracțiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ se numesc **echivalente** dacă şi numai dacă $a\cdot d=b\cdot c$.

ex: $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$ pentru că $2\cdot 10=4\cdot 5$

O fracție $\frac{a}{b}$ cu a $\in\mathbb{Z}$, b$\in\mathbb{Z}^*$se numeşte **ireductibilă** atunci când numitorul şi numărătorul sunt numere prime între ele, adică c.m.m.d.c. al lor este 1.

ex: $\frac{15}{7};\frac{21}{25}$

Numerele reprezentate printr-un raport de două numere întregi $a,b$ cu forma $\frac{a}{b}$ cu $b\neq 0$ reprezintă mulțimea tuturor numerelor de forma dată mai sus şi formează **mulțimea numerelor raționale**, care se notează cu $\mathbb{Q}$.

Un număr rațional poate fi reprezentat pe o axă a numerelor ocupând o poziție în raport de valoarea sa.

I.7.1. Egalitatea numerelor raționale

Două **numere raționale** notate cu $\frac{m}{n} si \frac{a}{b}$ sunt **egale** dacă fracțiile $\frac{m}{n} si \frac{a}{b}$ sunt fracții echivalente adică dacă $m \cdot b = n \cdot a$.

Relația de egalitate în domeniul numerelor raționale are proprietățile:

1. Reflexivitatea egalității:

   $\forall$ a$\in\mathbb{Q}$ avem $a = a$
2. Simetria egalității:

   $\forall$a, b$\in$ $\mathbb{Q}$, dacă $a = b$ atunci $b = a$
3. Tranzitivitatea egalității:

   $\forall$a, b, c $\in\mathbb{Q}$, dacă $a = b$ şi $b = c$, atunci $a = c$.
4. Relația de egalitate în domeniul numerelor raționale având proprietățile de reflexivitate, simetrie, tranzitivitate este o relație de echivalență.

I.7.2. Operații cu numere raționale

Adunarea

**Suma** a două numere raționale $\frac{m}{n} si \frac{a}{b}$ este dată de fracția $\frac{mb+na}{nb}$.

ex:

$$\frac{-5}{2}+\frac{2}{3}=\frac{(-5)\cdot 3+2\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{-15+4}{6}=\frac{-11}{6}$$

$$\frac{-7}{4}+\frac{4}{-3}=\frac{(-7)(-3)+4\cdot 4}{4\cdot(-3)}=\frac{-21+16}{-12}=\frac{-5}{-12}=\frac{5}{12}$$

Adunarea numerelor raționale are următoarele proprietăți

1. Comutativitatea adunării:

   $\forall$ a, b $\in\mathbb{Q}$, atunci $a + b = b + a$
2. Asociativitatea adunării:

   $\forall$ a, b, c $\in\mathbb{Q}$, atunci $(a+b)+c = a+(b+c)$
3. Există elementul 0 numit element neutru cu proprietatea că:

   $\forall$a$\in\mathbb{Q}$, atunci $a + 0 = 0 + a = a$
4. Există elementul opus oricărui număr rațional $a$, notat cu $-a$ astfel incat:

   $\forall$a$\in\mathbb{Q}$,$\exists$−a$\in\mathbb{Q}$ a.î. $a+(-a)=(-a)+a=0$

Scăderea

Oricare ar fi numerele raționale $a$ şi $b$ avem $a-b=a+(-b)$. Astfel, dacă dorim să scădem dintr-un număr rațional $a$ un alt număr rațional $b$, adunăm la numărul rațional $a$ opusul numărului $b$ adică $(-b)$

ex: $7-3=7+(-3=4)$

Obs:

1. Operația de scădere se poate efectua între oricare ar fi aceste numere raționale
2. Oricare ar fi un număr rațional avem: $a-0=a$, $0-a=-a$
3. Oricare ar fi $a,b,c$ numere raționale, dacă avem $a=b$, avem: $a-c=b-c$
4. Oricare ar fi $a,b,c,d$ numere raționale, dacă $a=b$ şi $c=d$, avem: $a-c=b-d$

Înmulțirea

Prin **produsul** a două numere raționale $\frac{m}{n}$ şi $\frac{a}{b}$ se obține un al treilea număr rațional notat cu $c$ astfel: $c=\frac{m\cdot a}{n\cdot b}$

ex:

$$\frac{-2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{(-2)\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{-10}{21}$$

$$\frac{2}{-5}\cdot\frac{-1}{11}=\frac{2\cdot(-1)}{(-5)\cdot 11}=\frac{-2}{-55}=\frac{2}{55}$$

Proprietățile înmulțirii numerelor raționale:

1. Comutativitatea înmulțirii:

   ∀a, b∈ℚ atunci $a\cdot b=b\cdot a$
2. Asociativitatea înmulțirii:

   ∀a, b, c∈ℚ,atunci $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
3. Distributivitatea înmulțirii față de adunare:

   ∀a, b, c∈ℚ, avem $a\cdot(b\cdot c)=ab+ac$
4. Există elementul 1 numit element neutru cu proprietatea că:

   ∀a ∈ℚ,atunci $a\cdot 1=1\cdot a=a$
5. Există elementul invers oricărui număr rațional $a$ notat cu $\frac{1}{a}$ astfel: $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$

Obs:

1. Oricare ar fi $a$ rațional avem:

   $$a\cdot(-1)=(-1)\cdot a=-a$$
2. Oricare ar fi $a,b,c$ raționale, dacă $a=b$ atunci $a\cdot c=b\cdot c$
3. oricare ar fi $a,b,c,d$ raționale, dacă $a=b$, $c=d$ atunci $a\cdot c=b\cdot d$

Împărțirea

Prin **câtul** a două numere raționale $\frac{m}{n}$ şi $\frac{a}{b}$ cu $a,b,n\neq 0$ se obține un al treilea număr rațional notat $c$ astfel: $c=\frac{\frac{m}{n}}{\frac{a}{b}}=\frac{m}{n}\cdot\frac{b}{a}$ deci se înmulțeşte deîmpărțitul cu inversul împărțitorului.

ex: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$

Proprietățile împărțirii numerelor raționale

1. Oricare ar fi $a$ număr rațional, avem: $a:1=\frac{a}{1}=a$
2. Oricare ar fi $a$ rațional, avem: $1:a=\frac{1}{a}=a^{-1}$

## I.8 MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Mulțimile de numere cunoscute sunt:

ℕ={0, 1, 2, 3, ....} -numerele naturale

$\mathbb{Z}$={... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...} -numerele întregi

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in Z-\{0\}\right\}$-numerele raţionale

Mulţimea **numerelor reale** reprezintă reuniunea dintre mulţimea numerelor raţionale şi cele iraţionale, notată cu $\mathbb{R}$.
Este evident că toate mulţimile studiate sunt submulţimi ale mulţimii numerelor reale: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

Mulţimea numerelor iraţionale se obţine prin $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.
Obs:
1.Din punct de vedere geometric, mulţimea numerelor reale reprezintă o dreaptă căreia i se asociază un punct numit origine corespunzător valorii 0 şi un sens de parcurgere corespunzător numerelor pozitive, iar sensul opus corespunzător numerelor negative.
2.Mulţimea numerelor reale este infinită în ambele sensuri: pozitivă şi negativă $(-\infty,\infty)$, unde:
$-\infty$ se citeşte „ minus infinit”
$+\infty$ se citeşte „plus infinit” sau infinit

I.8.1 Relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$

Oricum am alege două numere $a$ şi $b$ reale, există cel puţin una din relaţiile $a>b$ sau $a\leq b$, astfel, oricare două numere reale pot fi comparate.
Astfel ( $\mathbb{R}$, $\leq$) este o mulţime total ordonată în raport cu relaţia de ordine „$\leq$” (mai mic sau egal).
Proprietăţile relaţiei „$\leq$”:

1. Oricare ar fi a $\in\mathbb{R}$, avem $a\leq a$
2. Oricare ar fi a, b$\in\mathbb{R}$, dacă $a\leq b$ şi $b\leq a$, atunci $a=b$
3. Oricare ar fi a, b, c $\in\mathbb{R}$, dacă $a\leq b$ şi $b\leq c$, atunci $a\leq c$
4. Relaţia de ordine este compatibilă cu adunarea şi înmulţirea numerelor reale în sensul că:
    1) Dacă a, b, c $\in\mathbb{R}$ şi $a\leq b$, atunci $a+c\leq b+c$ şi reciproc
    2) Dacă a, b, c $\in\mathbb{R}$ şi $a\leq b$, atunci: $a\cdot c\leq b\cdot c$ dacă $c>0$ şi $a\cdot c\geq b\cdot c$ dacă $c<0$ şi reciproc
5. Dacă a, b, c, d $\in\mathbb{R}$ şi $a\leq b$, $c\leq d$ atunci: $a+c\leq b+d$

I.8.2. Valoarea absolută, valoare maximă,
valoare minimă; partea întreagă şi partea fracţionară

Numărul pozitiv notat |x| reprezintă **valoarea absolută** a numărului real $x$ şi este definit astfel:

$$|x|=\begin{cases}x, x\geq 0\\ -x, x<0\end{cases}$$

ex: $|-7|=7$ $|3|=3$ $|0|=0$

Obs:
1. Valoarea absolută se mai numeşte şi **modulul** numărului respectiv
2. Din punct de vedere geometric, valoarea absolută semnifică distanţa pe axa reală dintre cele două numere

Fie a, b $\in \mathbb{R}$ ,atunci prin max $(a,b)$ notăm **maximul** dintre numerele reale $a$ şi $b$ definit astfel:

max $(a,b)=\begin{cases} a, daca\ a \geq b \\ b, daca\ a < b \end{cases}$

ex: max $(-2,-3)=-2$

max $(-5,|5|)=|5|=5$

Fie a, b $\in \mathbb{R}$ , atunci prin min $(a,b)$ notăm **minimul** dintre numerele reale $a$ şi $b$ definit astfel: $\min(a,b)=\begin{cases} a, daca\ a \leq b \\ b, daca\ a > b \end{cases}$

I.8.3 Intervale de numere reale

Fie a şi b numere reale cu $a \leq b$

Notăm cu $[a;b]$ mulțimea {x$\in\mathbb{R}$ |a$\leq x\leq$b}. Acest interval se numeşte **interval închis** cu extremitățile a, b.

Notăm cu $(a;b)$ mulțimea {x$\in\mathbb{R}$| a$<x<$b} Acest interval se numeşte **interval deschis** cu extremitățile a, b.

Obs. Intervalele deschise spre deosebire de cele închise nu-şi conțin extremitățile.

ex. $[-1;4]=(-1;4)\cup\{-1;4\}$

Notăm cu $(a,b]$ mulțimea {x$\in\mathbb{R}$|a$<x\leq$b}. Acest interval se numeşte **interval semideschis** cu extremitățile a, b deschis la stânga şi închis la dreapta.

Notăm cu $[a,b)$ mulțimea {x$\in\mathbb{R}$|a$\leq x<$b}.. Acest interval se numeşte interval semideschis cu extremitățile a,b, închis la stânga şi deschis la dreapta.

Intervalele de forma:$(a;b);[a;b];[a,b);(a,b]$ cu a şi b date explicit se numesc intervale mărginite.

Intervalele de forma:

$(a;+\infty)$ adică mulțimea $\{x|x\in\mathbb{R},\ x>a\}$

$(-\infty;a]$ adică mulțimea $\{x|x\in\mathbb{R},\ x\leq a\}$

$[a,+\infty)$ adică mulțimea $\{x \mid x\in\mathbb{R},\ x\geq a\}$

$(-\infty,a)$ adică mulțimea $\{x \mid x\in\mathbb{R},\ x<a\}$

$(-\infty,+\infty)$ adică mulțimea $\{x \mid x\in\mathbb{R}\}$

se numesc **intervale nemărginite.**

Fie a$\in\mathbb{R}$.

A={x$\in\mathbb{R}$ / $|x|$<a}=(-a, a)

B={x$\in\mathbb{R}$ / $|x|\leq$ a}=[-a, a]

C={x$\in\mathbb{R}$/ $x$>a} = (-∞, -a) ∪ (a, ∞)

D={x$\in\mathbb{R}$/ $x\geq$a} = (-∞, -a] ∪ [a, ∞)

Obs: Intervalele sunt mulțimi asupra cărora se pot aplica toate operațiile studiate în capitolul mulțimi, ca rezultat obținându-se tot intervale de numere reale sau mulțimi vide.

I.8.4.Operații cu numere reale

Adunarea

Prin adunarea a două numere reale se obţine un al treilea număr real notat cu $s = a + b$ unde $s$ reprezintă **suma**, iar $a$ şi $b$ termenii sumei.
Proprietăţile adunării numerelor reale:

1. Comutativitatea: $a + b = b + a$ , a, b $\in \mathbb{R}$
2. Asociativitatea: $(a+b)+c = a+(b+c)$, a, b, c $\in \mathbb{R}$
3. Elementul neutru: $a + 0 = 0 + a = a$, a$\in \mathbb{R}$
4. Există elementul opus: $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Astfel se poate defini scăderea:

Prin scăderea a două numere reale $a, b$ se obţine un al treilea număr natural numit **diferenţă** iar $a$ scăzător şi $b$ descăzut, definit astfel: $d = a - b = a + (-b)$

Inmulţirea

Prin înmulţirea a două numere reale $a, b$ numiţi **factori** se obţine un al treilea număr real $p$ numit **produs** şi definit astfel: $p = a \cdot b$
Proprietăţile produsului numerelor reale:

1. Comutativitatea: oricare a, b $\in \mathbb{R}$ , $a \cdot b = b \cdot a$
2. Asociativitatea: oricare a, b, c $\in \mathbb{R}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Distributivitatea faţă de adunare: oricare a, b, c $\in \mathbb{R}$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
4. Există elementul 1 numit element neutru cu proprietatea că oricare a $\in \mathbb{R}$ , atunci $a \cdot 1 = 1 \cdot a = 1$
5. Există elementul invers oricărui număr real notat cu $\frac{1}{a}$ astfel: oricare a $\in \mathbb{R}$ , există- a $\in \mathbb{R}$ astfel încât $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

Ridicarea la putere cu exponent număr întreg:

Dacă $a$ este un număr real, iar $n$ un număr natural astfel încât $n \neq 0$ şi $n \neq 1$ atunci: $a^n = \underbrace{a \cdot a........a}_{n \quad ori}$, unde $a$ este baza iar $n$ exponentul

Obs:

1. Oricare ar fi a$\in \mathbb{R}$*, $a^0 = 1$
2. Oricare ar fi a$\in \mathbb{R}$*, $a^1 = a$

Proprietăţi :

1. Dacă a$\in \mathbb{R}$ şi m, n $\in \mathbb{R}$, atunci $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. Dacă a$\in \mathbb{R}$ şi m, n $\in \mathbb{R}$, atunci $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$
3. Puterea produsului este egală cu produsul puterilor $\left(a_1 \cdot a_2 ......a_i\right)^n = a_1{}^n \cdot a_2{}^n ......a_i{}^n$ ,oricare $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ $\in \mathbb{R}$, n$\in \mathbb{R}$
4. Dacă a $\in \mathbb{R}$*, m, n $\in \mathbb{R}$, atunci $a^m : a^n = a^{m-n}$
5. Dacă a $\in \mathbb{R}$*, n $\in \mathbb{R}$ atunci $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

---

**Partea întreagă** a unui număr real $x$, notată $[x]$ este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu $x$.

$x-[x]$ se notează cu $\{x\}$ şi se numeşte **partea fracționară** a lui $x$. $\{x\}=x-[x]$

Exemplu:

$[2,3]=2$

$[-4,37]=-5$

$[-4,37]=-4,37-(-5)=6,63$

$\{2,3\}=0,3$

Observație:

1) Dacă k∈ℝ, x∈ℝ şi $k\le x<k+1, [x]=k$
2) $0\le\{x\}<1$ oricare ar fi x∈ℝ
3) Dacă $\{x\}<0,5$, atunci rotunjirea la unități a lui $x$ este $[x]$.
4) Dacă $0,5\le\{x\}$, atunci rotunjirea la unități a lui $x$ este $[x]+1$

## I.9 PUTERI ŞI RADICALI

I.9.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

Puterea a doua a unui număr natural se mai numeşte şi pătratul acelui număr. Numărul natural care este pătratul altui număr natural se numeşte **pătrat perfect**.

Exemplu:

1) $49=7^2$
2) $5^{26}=\left(5^{13}\right)^2$
3) $a^{2k}=\left(a^k\right)^2$

Teoremă: Pătratul oricărui număr natural se termină numai cu una din cifrele $0,1,4,5,6,9$.

I.9.2 Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv

Pătratul unui număr rațional este totdeauna pozitiv sau zero (adică negativ).

Fie $a$ un număr rațional negativ $(a\ge 0)$. Numărul negativ $x$ se numeşte rădăcina pătrată a numărului $a$ dacă $x^2=a$.

Notăm **rădăcina pătrată** a numărului $a$ cu $\sqrt{a}$. Atunci:

1) $a\ge 0$ şi $\sqrt{a}=x$ înseamnă $x^2=a$ şi $x\ge 0$
2) $\left(\sqrt{a}\right)^2=a, \quad a\ge 0$

I.9.3 Proprietățile radicalilor

Numerele iraționale nu pot fi explicit scrise cu orice precizie şi din această cauză se preferă a fi lăsate sub forma $\sqrt{2},\sqrt{3}$ numită notație cu **radicali**. Radicalii au câteva proprietăți remarcabile:

1. Radicalii se înmulțesc astfel: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}, \quad unde \quad a,b\ge 0$

Exemplu: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=6$

2. Radicalii se împart astfel: $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}, \quad unde \quad a \geq 0, b > 0 \quad sau \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b,}}, unde \quad a \geq 0, b > 0$

Exemplu: $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

3. Dacă a $\in \mathbb{R}^*$avem $|a| = a$ şi deci $\sqrt{a^2} = a$

Exemplu:
$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$
$$\sqrt{180} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

Observaţie: Proprietatea 3 este adevărată şi reciproc atunci când dorim a introduce sub radicali anumiţi termeni.

Exemplu: $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$

Numim operaţie de **raţionalizare** a numitorului unei fracţii, care conţine la numitor radicali, amplificarea acestuia astfel ca numitorul să nu mai conţină radicali. Astfel pentru:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \quad am \quad amplificat \quad cu \quad \sqrt{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{a\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)}{x - y} \quad am \quad amplificat \quad cu \quad \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

I.9.4 Ordinea efectuării operaţiilor

1) Adunarea şi scăderea sunt numite operaţii de ordinul I
2) Înmulţirea şi împărţirea sunt numite operaţii de ordinul II
3) Ridicarea la putere şi radicalii sunt numite operaţii de ordinul III

Ordine de efectuare:

A. Dacă în expresie nu există paranteze, iar operaţiile sunt de acelaşi ordin, ele se efectuează de la stânga spre dreapta.

B. Dacă în expresie nu există paranteze, iar operaţiile nu sunt de acelaşi ordin, prima dată se efectuează operaţiile de ordin III, iar apoi de ordin II şi ultimele operaţiile de I.

C. Dacă în expresie există paranteze ,se efectuează prima dată operaţiile dintre paranteze, acolo unde este posibil.

I.9.5 Medii

**Media aritmetică** a două sau mai multe numere reale este numărul real obţinut prin împărţirea sumei numerelor respective la numărul lor.

Pentru numerele reale $a_1, a_2, ......, a_n \quad avem:$

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Exemplu: pentru 2,5,8: $m_a = \frac{2+5+8}{3} = \frac{15}{3} = 5$

**Media geometrică** sau **proporţională** a două numere negative este egală cu rădăcina pătrată din produsul lor.

$$a \geq 0, \quad b \geq 0 \qquad m_g = \sqrt{a \cdot b}$$

Media geometrică a două numere negative este cuprinsă între cel mai mic şi cel mai mare dintre numerele respective

Dacă $0 \le a \le b, \quad atunci \quad a \le \sqrt{a \cdot b} \le b$

Exemplu: pentru 2,8 $m_g = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

**Media aritmetică ponderată** a numerelor $a_1, a_2, ....a_n$ cu ponderile $p_1, p_2, ..., p_n$ (pozitive) este:

$$m_p = \frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + ... + a_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + .... + p_n}$$

Exemplu: pentru $2\sqrt{5}$ şi $3\sqrt{2}$ cu ponderile 2 şi 5 $m_p = \frac{2\sqrt{5} \cdot 2 + 3\sqrt{2} \cdot 5}{2+5} = \frac{4\sqrt{5} + 15\sqrt{2}}{7}$

I.9.6. Rapoarte şi proporţii

Numărul raţional $a : b$, unde a şi b sunt numere raţionale şi $b \neq 0$, se numeşte **raportul** numerelor a şi b şi se notează prin $\frac{a}{b}$ (a şi b se numesc termenii raportului).

Exemplu: $\frac{5,4}{2,8}; \frac{2\frac{1}{4}}{5\frac{1}{2}}$

Egalitatea a două rapoarte se numeşte **proporţie**: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

O proporţie are 4 termeni: 2 mezi (b şi c) şi 2 extremi (a şi d).

Proprietate: Proprietatea fundamentală a proporţiei:

Fie $a, c \in \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} \quad şi \quad b, d \in \mathbb{Q}$:

Dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atunci $a \cdot d = b \cdot c$ şi reciproc, dacă $a \cdot d = b \cdot c$, atunci $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Exemplu:

din $\frac{2,5}{6} = \frac{7,5}{18} \Rightarrow 2,5 \cdot 18 = 6 \cdot 7,5$

din $7 \cdot 9 = 21 \cdot 3 \Rightarrow \frac{7}{3} = \frac{21}{9}$

Dacă într-o proporţie se cunosc trei din cei patru termeni, îl putem afla pe al patrulea astfel:

un extrem $= \frac{produsul \quad mezilor}{celălalt \quad extrem}$

un mez $= \frac{produsul \quad extremilor}{celălalt \quad mez}$

Exemplu:

1) $\frac{x}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 10}{5} = 8$

2) $\frac{3}{7} = \frac{x}{11} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 11}{7} = \frac{33}{7}$

Două mărimi variabile care depind una de cealaltă astfel încât dacă măsura uneia creşte ( descreşte) de un număr de ori, atunci şi măsura celeilalte creşte (descreşte) de acelaşi număr de ori, se numesc mărimi **direct proporţionale**.

| M1 | a | b |
|---|---|---|
| M2 | c | d |

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad sau \quad a\cdot d=b\cdot c \quad sau \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

Două mărimi variabile care depind una de cealaltă astfel încât dacă măsura uneia creşte ( descreşte) de un număr de ori, atunci măsura celeilalte descreşte (creşte) de acelaşi număr de ori, se numesc mărimi invers proporţionale.

Mărimile $M_1$ $si$ $M_2$ sunt **invers proporţionale** dacă:

| | | |
|---|---|---|
| M1 | a | b |
| M2 | c | d |

$$\frac{a}{b}=\frac{d}{c} \quad sau \quad a\cdot c=b\cdot d \quad sau \quad \frac{a}{\frac{1}{c}}=\frac{b}{\frac{1}{d}}$$

Numărul p din proporţia $\frac{a}{b}=\frac{p}{100}$ se numeşte **procent** şi reprezintă cât la sută din numărul $b\neq 0$ este numărul $a$ sau cât la sută este $a$ din $b$; $p=(a\cdot 100):\mathrm{b}$.

Se scrie p urmat de semnul „%" şi se citeşte „p la sută".

Exemplu: 25 este 4% din 625 deoarece $\frac{25}{625}=\frac{4}{100}$

Pentru a afla p% dintr-un număr se înmulţeşte numărul cu $\frac{p}{100}$: p% din a este $\frac{p}{100}\cdot a$

Dacă p% din x este a, atunci $\frac{p}{100}\cdot x=a$, deci $x=a:\frac{p}{100}=a\cdot\frac{100}{p}$

Exemplu: 5% din 20 este $\frac{5}{100}\cdot 20=\frac{1}{20}\cdot 20=1$

Calculul **probabilităţii** de realizare a unui eveniment: Dacă: p este probabilitatea realizării evenimentului, m- numărul cazurilor favorabile; n- numărul cazurilor posibile, atunci: $p=\frac{m}{n}$

## II CALCULALGEBRIC

### II.1 Reguli de calcul prescurtat

1. $ab+ac=a(b+c)$
2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
3. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
4. $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
5. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
6. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
7. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
8. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
9. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
10. $(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$
11. $(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$
12. $(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$

## II.2 Inegalități

O **inegalitate** reprezintă o relație matematică adevărată sau falsă care se stabileşte între două expresii matematice. În general, cu inegalitățile se respectă următoarele reguli specifice:

A. Dacă a,b,c sunt numere reale astfel încât $a < b$, atunci $a + c < b + c$
B. Dacă a,b,c sunt numere reale astfel încât $a < b$ şi $c > 0$, atunci $ac < bc$
C. Dacă $a < b$ şi $c > 0$, atunci $ac > bc$
D. Dacă înmulțim ambii termeni ai unei inegalități cu un număr negativ, sensul inegalității se schimbă (se inversează).

Observație: Regulile A,B,C,D sunt valabile şi dacă înlocuim semnul < cu $\leq$, respectiv > cu $\geq$.

Exemplu: -6 < 7
-Prin urmare la ambii membri cu 5 : -1 < 13 adevărat
-Prin înmulțire cu 2: -12 < -14 adevărat
-Prin înmulțire cu -2 12 > -14 adevărat

## II.3. Calcul cu numere reale reprezentate prin litere

Produsul dintre un număr real şi o sumă algebrică se efectuează înmulțind acest număr cu fiecare termen al sumei, respectând regula semnelor de la înmulțire, după care se adună noii termeni astfel obținuți.

Exemplu:

$$k(a + b - c) = ka + kb - kc$$

$$-k(-a + b - c) = ka - kb + kc$$

Produsul dintre două sume algebrice se efectuează înmulțind fiecare termen al unei sume cu fiecare termen al celei de-a doua şi însumând noii termeni astfel obținuți.

Exemplu:

$$(a + b - c)(d - e) = ad - ae + bd - be - cd + ce$$

# III. FUNCȚII

Dacă printr-un procedeu oarecare facem ca oricărui element din mulțimea A să-i corespundă un singur element dintr-o altă mulțime B, spunem că am definit o **funcție** de la A la B.

A se numeşte **mulțimea** (domeniul) **de definiție** a funcției.
B se numeşte mulțimea în care funcția ia valori (codomeniul).
Procedeul se numeşte lege de corespondență

Notație : $f$:A→B citit “$f$ definit pe A cu valori în B”

Exemplu: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+3$

Observație : Pentru a caracteriza o funcție trebuie date trei elemente :

1) mulțimea de definiție ;

2) legea de corespondenţă ;
3) mulţimea în care ia valori ;

Două **funcţii** sunt **egale** dacă:
1) au aceeaşi mulţime de definiţie
2) $f(x)=g(x)$ pentru orice element din mulţimea de definiţie ;
3) iau valori în aceeaşi mulţime.

Mulţimea de puncte având coordonatele în plan $(x,y)$, unde $x$ este un element din mulţimea de definiţie A, iar $y=f(x)$ se numeşte **graficul** funcţiei $f$.

O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ descrisă de o lege de forma $f(x)=$ a$x$+b , unde a şi b sunt constante reale, se numeşte **funcţie liniară**.
Observaţie: Graficul unei funcţii liniare este o dreaptă.

Pentru **reprezentarea grafică a unei funcţii** liniare urmărim algoritmul :
1) Se calculează $f(0)$=b. Se reprezintă punctul (0,b). Acest punct reprezinţă punctul de intersecţie dintre graficul funcţiei şi axa ordonatelor O$y$.
2) Se rezolvă ecuaţia a$x$+b=0. Se reprezintă punctul $(\frac{-b}{a},0)$ .Acest punct reprezintă punctul de intersecţie dintre graficul funcţiei şi axa absciselor O$x$.
3) Se trasează dreapta care uneşte cele două puncte obţinute şi astfel se trasează graficul funcţiei liniare $f(x)=$ a$x$+b.

Observaţii :
1) Dacă a=0 şi b$\neq$0 obţinem funcţii de genul $f(x)$=b ale căror grafice sunt paralele cu axa O$x$. Aceste funcţii se numesc constante nenule.
2) Dacă a$\neq$0 şi b=0, se obţin funcţii de forma $f(x)$=a$x$ , funcţii care trec prin originea sistemului de axe.
3) Pentru a=b=0, se obţine ca grafic chiar axa absciselor O$x$.

Proprietăţi ale funcţiilor liniare :
Fie funcţia $f$:A$\to$B definită printr-o relaţie $f(x)$.
Proprietatea 1: Dacă pentru oricare ar fi r,s$\in$A cu $r>s$, avem $f(r)>f(s)$ şi spunem că funcţia este **strict crescătoare**
Proprietatea 2: Dacă pentru oricare ar fi r,s$\in$A cu $r>s$, avem $f(r)<f(s)$ şi spunem că funcţia este **strict descrescătoare**.
Observaţie: În general, o funcţie descrisă de legea $f(x)=$ a$x$+b poate fi:
- strict crescătoare dacă $a>0$,
- constantă dacă a=0,
- strict descrescătoare dacă $a<0$.

## IV.ECUAŢII ŞI INECUAŢII

O **ecuaţie** este o propoziţie cu o variabilă (propoziţiile cu o singură variabilă se mai numesc şi predicate) în care apare , o singură dată semnul de egal.

Exemplu: 2$x$-1=5 cu $x\in\{0,2,3,5\}$

$$\frac{2x+3}{2x^2-1}=1; x\in R$$

O ecuaţie cu o necunoscută are forma generală: S($x$)=D($x$), $x \in$M; necunoscuta fiind $x$, iar S şi D se numesc membrul stâng şi respectiv membrul drept al ecuaţiei, iar M este mulţimea soluţiilor ecuaţiei.

Observaţii:

1. Orice valoare din mulţimea M poate fi înlocuită în ecuaţie şi se poate obţine o propoziţie adevărată sau falsă. Dacă propoziţia obţinută este adevărată atunci valoarea respectivă este **soluţie** a ecuaţiei.
2. Prin rezolvarea ecuaţiei înţelegem găsirea tuturor soluţiilor ecuaţiei, din mulţimea M.

Exemplu: din $2x$-1=5, $x \in \{0,2,3,5\}$ prin înlocuirea lui $x$ obţinem o propoziţie adevărată doar pentru $x$=3.

Două **ecuaţii** sunt **echivalente** dacă au aceleaşi soluţii .

Notaţie : "$\Leftrightarrow$" semnul echivalenţei dispus între două ecuaţii, adică : S($x$)=D($x$) $\Leftrightarrow$ $S'(x) = D'(x)$

Există o serie de proprietăţi pe care ne bazăm în rezolvare şi pe care folosindu-le obţinem ecuaţii echivalente şi astfel găsim mulţimea de soluţii ale ecuaţiei.

Proprietate : Adunând la (sau scăzând din) ambii membri ai unei ecuaţii acelaşi număr real obţinem o ecuaţie echivalentă cu prima.

Consecinţă : Se pot trece termenii unei ecuaţii din membrul stâng în membrul drept şi invers schimbând doar semnul termenului.

Exemplu : $3x+1=2x+1 \mid +(-1) \Leftrightarrow 3x=2x$

Proprietate : Înmulţind (sau împărţind) ambii membri ai unei ecuaţii cu acelaşi număr real, diferit de zero, se obţine o ecuaţie echivalentă.

Exemplu : $4x-2=5 \mid 2 \Leftrightarrow 8x-4=10$

Proprietate : O ecuaţie este nedeterminată dacă există mai mult de o valoare din mulţimea M care generează propoziţii adevărate prin înlocuire în ecuaţie.

Exemplu : $2x-1=(6x-2)-4x+1$, $x \in \mathbb{R}$ echivalent cu 0=0, adică adevărat pentru orice $x$ real.

## IV. 1. ECUAŢIA DE GRADUL I

O ecuaţie de forma a$x$+b=0, $x \in \mathbb{R}$ în care $a \neq 0$; a,b$\in \mathbb{R}$ poartă denumirea de **ecuaţie de gradul I** cu o necunoscută. **Soluţia** ecuaţiei este unică , $x = -\frac{b}{a}$

Exemplu : $2x-2=0 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{2} \Leftrightarrow x=1$

## IV.2 SISTEME DE ECUAŢII DE GRADUL I

Un **sistem de ecuaţii** reprezintă o colecţie de două sau mai multe ecuaţii care au aceleaşi necunoscute.

Observaţie : Dacă în ecuaţii necunoscutele sunt la puterea 1, atunci sistemul este un sistem de ecuaţii de gradul I.

Rezolvarea unui sistem de ecuaţii se bazează pe proprietăţile enunţate la capitolul ecuaţii. Astfel, distingem două metode devenite clasice :

1.**Metoda substituţiei** :

Se exprimă una din necunoscute dintr-o ecuaţie şi se înlocuieşte în cea de-a doua rezultând o ecuaţie cu o singură necunoscută care se rezolvă şi apoi se exprimă şi cea de-a doua necunoscută.

Exemplu : $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x \\ x+2(4-2x)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{8}{3} \end{cases}$

2. **Metoda reducerii**:

Se înmulțesc ecuațiile cu expresii a căror valoare este astfel aleasă încât în urma adunării ecuațiilor obținute , să rezulte o ecuație cu o singură necunoscută.

Exemplu : $\begin{cases} 2x+y=4 \,|(-1) \\ x+2y=6 \,|2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{-2x - y = -4} \\ \text{2x + 4y = 12} \end{cases} \Leftrightarrow 3y=8 \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{8}{3} \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$

### IV.3 ECUAȚIA DE GRADUL AL-II-LEA

Ecuația de forma $ax^2+bx+c=0, a,b,c \in R, a \neq 0, x \in R$ poartă denumirea de **ecuație de gradul al II-lea.** Se numeşte **soluție** a ei un număr real $\propto$ astfel încât : $a\alpha^2+b\alpha+c=0$

**Rezolvarea ecuației de gradul al II-lea**:

Se calculează **discriminantul** ecuației cu formula: $\Delta=b^2-4ac$

În funcție de semnul acestuia, avem cazurile:

I. $\Delta<0 \Rightarrow$ ecuația nu admite soluții reale

II. $\Delta=0 \Rightarrow$ ecuația are o rădăcină reală dublă: $x=-\frac{b}{2a}$

III. $\Delta>0 \Rightarrow$ ecuația are două rădăcini reale distincte: $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Exemplu: a) $x^2+x+1=0$

$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0 \Rightarrow$ *nu avem solutii reale*

b) $4x^2+4x+1=0$

$\Delta=4^2-4\cdot4\cdot1=16-16=0 \Rightarrow x_1=x_2=-\frac{4}{4\cdot2}=-\frac{1}{2}$

c) $x^2-5x+6=0$

$\Delta=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1} \Rightarrow x_1=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3 \quad x_2=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$

### IV. 4 INECUAȚII

O relație de tipul $f(x)$ rel. $g(x)$, unde rel. reprezintă o relație de tipul $<,>,\leq,\geq$ iar $f(x)$ şi $g(x)$ sunt funcții definite pe numere reale cu valori reale se numeşte **inecuație**.

A rezolva o inecuație înseamnă a găsi toate valorile lui $x \in \mathbb{R}$, pentru care este adevărată inegalitatea. Pentru rezolvare se transformă inecuația în inecuații echivalente mai simple pe baza unor proprietăți ale inecuațiilor.

Proprietăți:

1. Dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$ *si* $a - c < b - c$
2. Dacă $a < b$ şi $c > 0$, atunci $a \cdot c < b \cdot c$ şi $a : c < b : c$
3. Dacă $a < b$ şi $c < 0$, atunci $a \cdot c > b \cdot c$ şi $a : c > b : c$
4. Dacă vrem, în loc de $a < b$ putem scrie şi $b > a$

Observație: Aceleaşi proprietăți sunt valabile şi dacă înlocuim semnul $<$ cu $\leq$ sau semnul $>$ cu $\geq$.

Două sau mai multe inecuații grupate se numesc **sistem de inecuații**.

A rezolva un sistem de inecuații înseamnă găsirea acelor valori ale necunoscutei care îndeplinesc simultan condițiile din inecuațiile respective. Aceste valori se determină prin rezolvarea fiecărei inecuații şi apoi determinarea prin operația de intersecție a mulțimii de soluții comune.