GEOMETRIE:

Rezolvarea unui triunghi (*a,b,c* lungimile laturilor; A,B,C, măsurile unghiurilor; aria S; înălțimea respectiv mediana din A sunt h_a, m_a; R, r – razele cercurilor circumscris, respectiv înscris în triunghi, semiperimetrul p.

Cazul I Se cunosc lungimile laturilor: a=BC, b=AC, c=AB. Triunghiul există numai dacă $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$.

Se pot afla imediat **aria**, **cosinusul unui unghi**, **lungimea unei mediane** şi **razele** R, r cu ajutorul formulelor:

$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, unde...p=\frac{a+b+c}{2}}$ $\boxed{\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$ $\boxed{m_a^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}}$ $\boxed{R=\frac{abc}{4S}}$ $\boxed{r=\frac{S}{p}}$

Unghiul A este **ascuțit, obtuz sau drept** după cum cantitatea $b^2+c^2-a^2$ este **pozitivă, negativă sau nulă**.

$\boxed{\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}}$ sau, din formula ariei $\boxed{S=\frac{bc\sin A}{2}\Rightarrow \sin A=\frac{2S}{bc}}$; $\boxed{S=\frac{a\cdot h_a}{2}\Rightarrow h_a=\frac{2S}{a}}$

Observație: Verificați dacă triunghiul este dreptunghic (dacă pătratul laturii mai mari este egal cu suma pătratelor laturilor mai mici). În acest caz aveți formule mai simple: (presupunem că unghiul drept este A)

$\boxed{S=\frac{c_1\cdot c_2}{2}}$ $\boxed{h_a=\frac{c_1\cdot c_2}{ip}}$ $\boxed{m_a=\frac{1}{2}\cdot ip=R}$ $\boxed{\sin=\frac{cateta...opusa}{ipotenuza}}$ $\boxed{\cos=\frac{cateta...alaturata}{ipotenuza}}$ $\boxed{tg=\frac{cateta...opusa}{cateta...alaturata}}$

(sinusul, cosinusul şi tangenta se referă la unghiurile ascuțite ale triunghiului dreptunghic)

Cazul II Se cunosc lungimile laturilor: b=AC, c=AB şi măsura unghiului dintre ele, A.

Se pot afla direct **aria** şi **a treia latură**: $\boxed{S=\frac{bc\sin A}{2}}$ $\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A}$. Problema s-a redus la cazul I.

Cazul III Se cunosc lungimile laturilor: b=AC, c=AB şi măsura unghiului opus uneia dintre ele, de exemplu B.

În acest caz rezolvarea începe cu teorema sinusurilor: $\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R}$ Se observă că imediat putem afla $\boxed{R=\frac{b}{2\sin B}}$ şi $\boxed{\sin C=\frac{b}{c\sin B}}$. Cunoscând unghiurile B şi C putem afla $A=180^\circ-B-C$, după care, tot din rapoartele de mai sus, putem afla a treia latură, a, iar de aici avem cazul I.

Cazul IV Se cunosc măsurile a două unghiuri, şi lungimea unei laturi, de exemplu a=BC. În acest caz putem afla imediat ultimul unghi din $A+B+C=180^\circ$. Celelalte două laturi le aflăm folosind teorema sinusurilor.

Elemente de geometrie analitică : Puncte şi drepte în plan.

Un punct se scrie $P(x_P, y_P)$; x_P şi y_P sunt abscisa respectiv ordonata punctului P. Ambele sunt coordonatele lui P.

Ecuația unei drepte: $(d): ax+by+c=0, a^2+b^2\neq 0$. $\boxed{P\in d\Leftrightarrow a\cdot x_P+b\cdot y_P+c=0}$.

Dacă $\boxed{(d_1): a_1x+b_1y+c_1=0}$ şi $\boxed{(d_2): a_2x+b_2y+c_2=0}$. Atunci: $\boxed{d_1\perp d_2\Leftrightarrow a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2=0}$

şi $\boxed{d_1 \parallel d_2\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}}$. Distanța de la P la dreapta d: $\boxed{d(P,d)=\frac{|a\cdot x_P+b\cdot y_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

Unghiul celor două drepte se poate afla cu formula: $\boxed{\cos\alpha=\frac{a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}}$.

Exemplu: Dacă ecuația unei drepte este: $(d): 2x+5y-11=0$;

o dreaptă paralelă cu *(d)* are forma: $(d'): 2x+5y+c'=0$,

iar una perpendiculară pe *(d)* are forma: $(d''): 5x-2y+c''=0$

Relația: $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\end{vmatrix}=0$ este ecuația dreptei determinată de punctele A şi B.

Aria $\triangle ABC$, $S=\frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}$; $\boxed{\Delta=0\Leftrightarrow A,B,C\ coliniare}$

Lungimea segmentului AB $=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Mijlocul segmentului ABeste $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

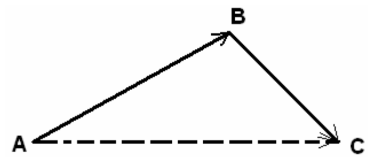
Centrul de greutate $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$

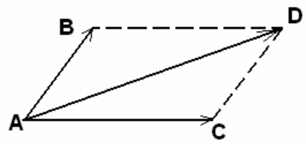
Elemente de geometrie vectorială

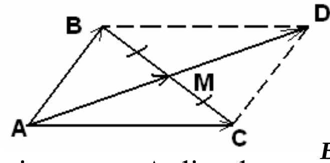
Vectori: Pentru o mărime vectorială este nevoie de trei caracteristici: direcție, sens şi lungime (sau modul).

Adunarea vectorilor: Regula triunghiului: $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$; Regula poligonului: $\boxed{\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}}$

Regula paralelogramului: $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}, unde..ABDC-paralelogram.}$ Scăderea vectorilor: $\boxed{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}}$







$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}\Rightarrow$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$

(**M** mijlocul lui **BC**)

Dacă **M** împarte segmentul **BC** în raportul k atunci, pentru orice punct **A** din plan: $\frac{BM}{MC}=k\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{1+k}\overrightarrow{AC}$

Vectori în sistem de coordonate:

Un vector: $\boxed{\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}}$; **Lungimea**: $\boxed{|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2}}$; **Produsul scalar**: $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=a_1a_2+b_1b_2=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha}$

Dacă produsul scalar este nul atunci vectorii sunt perpendiculari: $\boxed{\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0}$ Doi vectori sunt coliniari dacă există un număr real nenul α astfel încât $\boxed{\vec{u}=\alpha\cdot\vec{v}}$. **Vectorii coliniari** au coeficienții proporționali: $\boxed{\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}}$

Dacă punctul $M(a,b)$ este un punct din plan atunci $\overrightarrow{OM}$ se numeşte vector de poziție. Notăm $\boxed{\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{r_M}}$

Pentru $M(a,b)$ avem $\overrightarrow{r_M}=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}$ (coordonatele vectorului de poziție sunt coordonatele lui M).

Dacă $A(x_A;y_A)$ şi $B(x_B;y_B)$ atunci coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ sunt $(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

Mai exact: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\cdot\vec{i}+(y_B-y_A)\cdot\vec{j}$

TRIGONOMETRIE: Unghiurile se măsoară în grade sau radiani. 1radian are aproximativ 57°.

$\sin 30°=\cos 60°=1/2.......tg30°=1/\sqrt{3}$

$\sin 45°=\cos 45°=\sqrt{2}/2....tg45°=1$

$\sin 60°=\cos 30°=\sqrt{3}/2....tg60°=\sqrt{3}$

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$

$\sin(a\pm b)=\sin a\cdot\cos b\pm\sin b\cdot\cos a$

$\cos(a\pm b)=\cos a\cdot\cos b\mp\sin a\cdot\sin b$

$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x;\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$

$\sin(\pi-x)=\sin x;\cos(\pi-x)=-\cos x$

$tg(a\pm b)=\frac{tg\,a\pm tg\,b}{1\mp tg\,a\cdot tg\,b}$

$\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$\cos 2x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$

$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}.....1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$

$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$

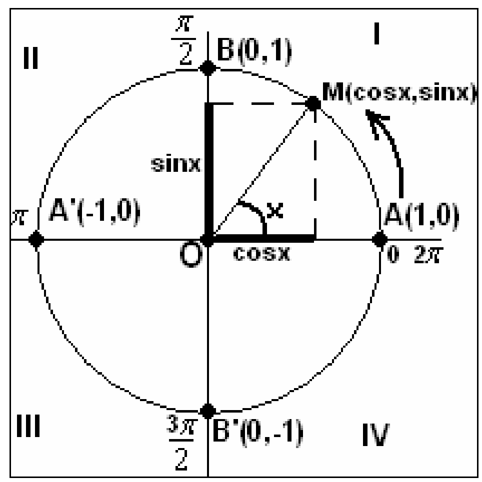
$2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$

$2\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y)$

$tgx=t\Rightarrow\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2};\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$

$tg\frac{x}{2}=t\Rightarrow\sin x=\frac{2t}{1+t^2};\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Dacă x şi y sunt suplementare ($x+y=180°$) atunci: $\boxed{tgx=-tgy}$ $\boxed{\sin x=\sin y}$ $\boxed{\cos x=-\cos y}$



Cadran I	sin x > 0	şi	cos x > 0	
Cadran II	sin x > 0	şi	cos x < 0	
Cadran III	sin x < 0	şi	cos x < 0	
Cadran IV	sin x < 0	şi	cos x > 0	
1 radian	≈ 57°		în cadranul I	
2 radiani	≈115°		în cadranul II	
3 radiani	≈ 172°		în cadranul II	
4 radiani	≈229°		în cadranul III	
5 radiani	≈ 286°		în cadranul IV	
6 radiani	≈344°		în cadranul IV	

Ecuații trigonometrice fundamentale:

$\boxed{\sin x=a\in[-1;1]\Rightarrow x\in\{(-1)^k\cdot\arcsin a+k\pi/k\in Z\}}$

$\boxed{\cos x=a\in[-1;1]\Rightarrow x\in\{\pm\arccos a+2k\pi/k\in Z\}}$

$\boxed{tgx=a\in R\Rightarrow x\in\{arctga+k\pi/k\in Z\}}$