Elemente de algebră liniară

Matrice

Considerăm o mulțime $E \subset \mathbb{C}$ și $m, n \in \mathbb{N}^*$. *Matrice de tip (m, n) cu elemente din E* este o funcție $A : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \to E$. Spunem că matricea A are m linii și n coloane.

Dacă notăm $A(i; j) = a_{ij}$, matricea A poate fi notată prin $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

În cazul în care nu există pericol de confuzie, notăm matricea A prin (a_{ij}).

Mulțimea matricelor de tip (m,n) cu elementele din mulțimea E se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(E)$.

O matrice de tip (n, n) se numește *matrice pătratică de ordin n* și se notează $(a_{ij})_n$ sau (a_{ij}), iar mulțimea matricelor pătratice se notează $\mathcal{M}_n(E)$.

Sistemul ordonat de elemente $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ se numește *diagonala principală* a matricei A, iar sistemul $(a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{n1})$ se numește *diagonala secundară*).

O matrice de tip (m, n) cu toate elementele egale cu 0 se numește *matrice nulă* și se notează $O_{m,n}$.

Matricele $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ și $(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ sunt *egale* dacă $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Transpusa unei matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ cu m linii și n coloane este o matrice notată ${}^tA = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$ cu n linii și m coloane, cu $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Operații cu matrice

Suma matricelor $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ și $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$, din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, este matricea

$C = A + B = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$, cu $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Produsul dintre numărul complex λ (numit scalar) *și matricea* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ este matricea $B = \lambda A = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$, unde $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Produsul matricelor $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ și $B=(b_{jk})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\1\leqslant k\leqslant p}}$ (în această ordine) este matricea $C=A\cdot B=(c_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant k\leqslant p}}$, cu $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+...+a_{in}\cdot b_{nk}$, $i=\overline{1,\ m}$, $j=\overline{1,\ p}$.

Pentru $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avem $A^k=\underbrace{A\cdot...\cdot A}_{\text{de } k \text{ ori}}$, $k\in\mathbb{N}^*$, iar $A^\circ=I_n$.

Determinanți

Determinantul unei matrice de ordin 2, $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, este numărul notat $\det A=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$.

Determinantul unei matrice de ordin 3, $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, este numărul

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Fie $A=(a_{ij})$ o matrice de tip $(m;\ n)$. Un *minor de ordinul r* al matricei A este determinantul matricei pătratice formată cu elementele lui A situate la intersecțiile a r linii distincte cu r coloane distincte.

Dacă $A=(a_{ij})$ este o matrice pătratică de ordinul n, *complementul algebric al elementului* a_{ij} este numărul $(-1)^{i+j}d_{ij}$, unde d_{ij} este minorul obținut prin eliminarea liniei i și a coloanei j din matricea A.

Dezvoltarea determinantului după o linie sau o coloană se face astfel:
1. alegem o linie sau o coloană și înmulțim fiecare element al ei cu complementul său algebric;
2. adunăm produsele astfel obținute.

De exemplu, alegând prima linie a unui determinant de ordinul 3, obținem:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

Sisteme liniare

O *ecuație liniară* cu n necunoscute, $x_1, x_2, ..., x_n$ este o ecuație de forma: $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b_1$, unde $a_1, a_2, ..., a_n, b_1\in\mathbb{C}$.

Forma generală a unui *sistem liniar* este: $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ \text{.......................................}\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$, unde $x_1, ...\ x_n$

sunt *necunoscutele sistemului*, numerele complexe a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ sunt *coeficienții necunoscutelor* și b_1, b_2, ... b_m sunt *termenii liberi ai sistemului*.

Unui sistem liniar îi asociem *matricea sistemului*, notată A, formată din coeficienții necunoscutelor și *matricea extinsă a sistemului*, notată $\overline{A}$, care se obține adăugând la coloanele matricei A coloana termenilor liberi:

$$A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}$$

Indicele i indică ecuația sistemului și indicele j indică necunoscuta la care ne referim.

Un *sistem liniar* se numește *omogen* dacă toți termenii liberi $b_1, b_2, ..., b_m$ sunt nuli. În caz contrar, *sistemul* liniar este *neomogen*.

Un *sistem liniar* poate fi:

– *compatibil determinat*, dacă are o soluție unică;

– *compatibil nedeterminat*, dacă are o infinitate de soluții;

– *incompatibil*, dacă nu are soluție.

Pentru un sistem liniar de n ecuații și n necunoscute, dacă determinantul matricei sistemului este nenul, atunci sistemul este compatibil determinat; în caz contrar, sistemul poate fi incompatibil sau compatibil nedeterminat.

Metoda lui Cramer

Fie $\mathscr{S}$ un sistem liniar cu n ecuații și n necunoscute și fie Δ determinantul matricei acestui sistem.

Dacă $\Delta \neq 0$, notăm cu Δ_{x_i} determinantul obținut din Δ prin înlocuirea coloanei corespunzătoare coeficienților necunoscutei x_i cu coloana termenilor liberi, $\forall i=\overline{1,n}$. Atunci $x_i=\dfrac{\Delta x_i}{\Delta}$, $\forall i=\overline{1,n}$.

Matrice inversabile

O *matrice* pătratică $A=(a_{ij})_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește *inversabilă* dacă există matricea $B=(b_{ij})_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A\cdot B=B\cdot A=I_n$.

Matricea pătratică $A=(a_{ij})_n$ este inversabilă dacă și numai dacă $\det A \neq 0$.

Inversa matricei A este matricea $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^*$, unde A^* se obține înlocuind fiecare element al matricei ${}^tA$ cu complementul său algebric. A^* se numește *adjuncta matricei A*.

Ecuații matriceale

Un sistem liniar poate fi exprimat matriceal astfel: $AX=B$, unde A este matricea sistemului, X este matricea necunoscutelor (matrice coloană) și B este matricea termenilor liberi (matrice coloană). Dacă matricea A este inversabilă avem $X = A^{-1}B$ soluție unică.

Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ nu este nulă, există un număr natural $r \leqslant \min\{m, n\}$ astfel încât cel puțin un minor de ordinul r este nenul, iar toți minorii de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli. Numărul r se numește *rangul matricei A*.

Teorema Kronecker-Capelli.

Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă și numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse.

Teorema lui Rouché. Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă și numai dacă toți determinanții caracteristici sunt nuli.

Terminologia și notațiile din teorema lui Rouché se explică în cele ce urmează.

Determinanții caracteristici se consideră în cazul în care rangul sistemului este mai mic decât numărul de ecuații.

Din matricea sistemului alegem un minor nenul de ordin r pe care îl numim *determinant principal* și îl notăm Δ_p. Necunoscutele ai căror coeficienți sunt coloane în Δ_p se numesc *necunoscute principale*. Celelalte se numesc *necunoscute secundare*. Ecuațiile ai căror coeficienți sunt linii în Δ_p se numesc *ecuații principale*. Celelalte se numesc *ecuații secundare*.

Construim *determinanții caracteristici*, Δ_{car}, prin bordarea determinantului principal Δ_p: „orizontal" cu coeficienții necunoscutelor principale din câte o ecuație secundară și „vertical" cu termenii liberi corespunzători.

Un sistem liniar se poate rezolva prin *metoda lui Gauss*, care constă în aducerea sistemului la o formă triunghiulară: $\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n-1}x_{n-1} + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad\quad \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n-1}x_{n-1} + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_{n-1n-1}x_{n-1} + \alpha_{n-1n}x_n = \beta_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{cases}$.

În acest caz, soluția sistemului se obține ușor pornind de la ultima ecuație.

Forma triunghiulară se obține aplicând sistemului inițial transformările:

i) permutarea între ele a două ecuații;

ii) înmulțirea unei ecuații cu un număr nenul;

iii) adunarea unei ecuații la o altă ecuație.